NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Solution des questions proposées par le P. Pepin

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14 (1875), p. 371-377

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__371_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DES QUESTIONS PROPOSÉES PAR LE P. PEPIN

(voir même tome, p. 275);

PAR M. MORET-BLANC.

1. THÉORÈME. — *Si l'on désigne par a et b deux nombres entiers quelconques, l'un des produits*

$$ab(a^2 - b^2), \quad (a^2 - 2b^2)(a^2 - 4b^2)$$

est toujours divisible par 7, savoir : le premier, si la somme $a^2 + b^2$ *est de l'une des formes* $7l$, $7l+1$, $7l+2$, $7l+4$, *et le second si cette somme est de l'une des formes* $7l+3$, $7l+5$, $7l+6$.

Démonstration. — Un nombre quelconque est de l'une des formes $7l$, $7l \pm 1$, $7l \pm 2$, $7l \pm 3$.

Les formes correspondantes des carrés sont $7l$, $7l+1$, $7l+4$, $7l+2$.

Le produit $ab(a^2-b^2)$ est évidemment divisible par 7 :

1° Quand l'un des nombres a et b est divisible par 7;

2° Quand a^2 et b^2 sont de même forme.

Dans ces deux cas, a^2+b^2 est de l'une des formes $7l$, $7l+1$, $7l+2$, $7l+4$.

Si l'on a

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=7l+1, & b^2=7l+4 \\ a^2=7l+4, & b^2=7l+2 \\ a^2=7l+2, & b^2=7l+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2-2b^2=7l, \\ a^2+\ b^2=7l+(3,5,6), \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=7l+1, & b^2=7l+2 \\ a^2=7l+4, & b^2=7l+1 \\ a^2=7l+2, & b^2=7l+4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2-4b^2=7l, \\ a^2+\ b^2=7l+(3,5,6). \end{array}$$

Le théorème est donc démontré.

2. Théorème. — *Soient a et b deux nombres entiers quelconques : l'un des deux produits*

$$ab(a^2-3b^2)(a^2-4b^2), \quad (a^2-b^2)(a^2-5b^2)(a^2-9b^2)$$

est toujours divisible par 11, *savoir : le premier, si la somme* a^2+b^2 *est de l'une des formes*

$$(1) \qquad 11l+(0,1,3,4,5,9),$$

et le second, si cette somme est de l'une des formes

$$(2) \qquad 11l+(2,6,7,8,10).$$

Démonstration.—Formes des nombres : $11l$, $11l\pm1$, $11l\pm2$, $11l\pm3$, $11l\pm4$, $11l\pm5$.

Formes des carrés $11l$, $11l+1$, $11l+4$, $11l+9$, $11l+5$, $11l+3$.

Si l'un des nombres a et b est de forme $11l$, ab est divisible par 11.

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=11l+1, & b^2=11l+4 \\ a^2=11l+4, & b^2=11l+5 \\ a^2=11l+9, & b^2=11l+3 \\ a^2=11l+5, & b^2=11l+9 \\ a^2=11l+3, & b^2=11l+1 \end{array}\right\} a^2-3b^2=11l,$$

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=11l+1, & b^2=11l+3 \\ a^2=11l+4, & b^2=11l+1 \\ a^2=11l+9, & b^2=11l+5 \\ a^2=11l+5, & b^2=11l+4 \\ a^2=11l+3, & b^2=11l+9 \end{array}\right\} a^2-4b^2=11l.$$

Dans tous ces cas, a^2+b^2 appartient à l'une des formes (1).

Si a^2 et b^2 sont de même forme, a^2-b^2 est divisible par 11.

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=11l+1, & b^2=11l+9 \\ a^2=11l+4, & b^2=11l+3 \\ a^2=11l+9, & b^2=11l+4 \\ a^2=11l+5, & b^2=11l+1 \\ a^2=11l+3, & b^2=11l+5 \end{array}\right\} a^2-5b^2=11l,$$

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=11l+1, & b^2=11l+5 \\ a^2=11l+4, & b^2=11l+9 \\ a^2=11l+9, & b^2=11l+1 \\ a^2=11l+5, & b^2=11l+3 \\ a^2=11l+3, & b^2=11l+4 \end{array}\right\} a^2-9b^2=11l.$$

Dans tous ces cas, a^2+b^2 appartient à l'une des formes (2), ce qui démontre le théorème.

3. Théorème. — *Soient a, b, c, ... des facteurs premiers inégaux, $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, et $\varphi(n)$ la fonction nu-*

mérique qui exprime combien dans la suite 1, 2, 3,..., n *il y a de nombres premiers relativement à* n. *Cette fonction jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :*

$$m = \varphi(m) + \sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}}\right) + \sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}b^{\beta}}\right)$$
$$+ \sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}}\right) + \ldots + a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots.$$

Soit, par exemple, $m = 3^2.5^2$, *on a*

$$3^2.5^2 = 225 = \varphi(225) + 5\varphi(9) + 3\varphi(25) + 15.$$

La suite des nombres entiers depuis 1 jusqu'à m comprend :

1° Les nombres premiers avec m; leur nombre est $\varphi(m)$;

2° Ceux qui ne sont divisibles que par un seul des nombres premiers a, b, c,...; leur nombre est

$$\sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}}\right).$$

En effet, on obtiendra ceux qui n'admettent que le facteur a, en multipliant les nombres premiers avec $\frac{m}{a^{\alpha}}$, dont le nombre est $\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}}\right)$ par les multiples de a, non supérieurs à a^{α}, dont le nombre est $\frac{a^{\alpha}}{a} = a^{\alpha-1}$; il y en a donc $a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}}\right)$. De sorte que $\sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}}\right)$ exprime combien, de 1 à m, il y a de nombres divisibles par un seul des nombres premiers a, b, c,...;

3° Les nombres qui sont divisibles par deux des nombres premiers a, b, c,...; il y en a évidemment

$$\sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha}b^{\beta}}\right);$$

4° Ceux qui sont divisibles par trois des facteurs a, b, c, . . . ; leur nombre est

$$\sum a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \varphi\left(\frac{m}{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}}\right), \ldots .$$

Enfin ceux qui sont divisibles par tous les facteurs premiers a, b, c, . . . ; il y en a

$$a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots .$$

Comme de 1 à m il y a m nombres, l'égalité est démontrée.

Legendre a démontré qu'aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube. On peut énoncer le théorème suivant, plus général :

Aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube multiplié par une puissance entière quelconque d'un nombre premier de l'une des deux formes $18m+5$, $18m+11$, *ni à un cube multiplié par une puissance quelconque de* 2 *ou par le double d'un nombre premier* $18m+11$, *ou encore par le double du carré d'un nombre premier* $18m+5$.

Il faut démontrer qu'on ne peut avoir en nombres entiers

$$x(x+1) = 2p^n z^3,$$

p étant un nombre premier de la forme $18m+5$ ou $18m+11$. On peut supposer $n=1$ ou $n=2$, car, si l'on a $n=3n'$, $n=3n'+1$ ou $n=3n'+2$, le facteur $p^{3n'}$ pourra être compris dans z^3. Cela posé, on aura

$$x = 18m + \left\{\begin{matrix} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, \\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17 \end{matrix}\right\},$$

$$x+1 = 18m + \left\{\begin{matrix} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 0 \end{matrix}\right\},$$

$$x(x+1) = 18m + (0, 2, 6, 12),$$
$$z^3 = 18m + (0, 1, 8, 9, 10, 17),$$
$$2z^3 = 18m + (0, 2, 16),$$
$$p^n = 18m + (5, 7, 11, 13) \qquad (n = 1 \text{ ou } n = 2).$$

1° Supposons d'abord qu'aucun des nombres x, $x+1$ ne soit multiple de 18. On aura

$$x(x+1) = 18m + (2, 6, 12),$$
$$2p^n z^3 = 18m + (4, 8, 10, 14).$$

L'égalité $x(x+1) = 2p^n z^3$ est donc impossible.

Si l'on remplace p^n par 2, 4, $2(18m+11)$ ou $2(18m+5)^2 = 18m+14$, le second membre reste toujours de l'une des formes $18m + (4, 8, 10, 14)$, et l'impossibilité subsiste.

2° Soit x un multiple de 18; décomposons z en deux facteurs u et v dont l'un soit premier avec 18 : on aura

$$x = 2u^3 = 18m,$$
$$x+1 = p^n v^3 = 18m+1,$$
$$p^n = 18m + (5, 7, 11, 13),$$
$$v^3 = 18m + (1, 9, 17),$$
$$p^n v^3 = 18m\,(5, 7, 11, 13).$$

L'égalité $x+1 = p^n v^3$ est encore impossible.

Si l'on remplace p^n par $2(18m+11)$ ou par $2(18m+5)^2$, il faudra qu'on ait

$$x = 4u^3,$$
$$x+1 = 18m + (7, 11)\,v^3.$$

Or

$$17m + (7, 11)\,v^3 = 18m + (7, 9, 11).$$

Il y a donc encore impossibilité.

On voit qu'il en sera encore de même si $x+1 = 18m$; x sera alors de la forme $18m+17$, incompatible avec celle de $p^n v^3$.

Dans le cas où l'on ferait $p = 2$, on aurait

$$x = 2^n u^3,$$

$$x + 1 = v^3,$$

ou *vice versâ*, d'où

$$v^3 - 2^n u^3 = 1 \quad \text{ou} \quad 2^n u^3 - v^3 = 1,$$

ou bien

$$v^3 \pm 1 = 2^n u^3.$$

Mais Legendre a démontré que l'équation

$$x^3 + y^3 = 2^n z^3$$

est impossible en nombres entiers positifs ou négatifs. Le théorème est donc démontré dans tous les cas.