NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE VIRIEU

Théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14 (1875), p. 349-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__349_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

A la page 144 du tome IX des *Nouvelles Annales* (1re série), se trouve une Note ainsi conçue :

Comment démontrer que

$$\frac{x^m-1}{x-1}\,\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}\cdots\frac{x^{m+1-p}-1}{x^p-1}$$

est une fonction entière de x, m et p étant des entiers positifs dont le premier n'est pas inférieur au second.

1. Posons, b étant un entier positif,

$$F(x, z, m, b) = (1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b}).$$

$F(x, z, m, b)$ est une fontion entière de x et de z et du degré m par rapport à celle-ci; on peut poser

$$(A)\qquad (1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b}) = \sum_{p=0}^{p=m}(x_p z^p).$$

2. On a $x_0 = 1$. Dans l'hypothèse $1 \leqq p \leqq m$, x_p est une fonction entière de x, et, comme elle est la somme de produits dont chacun contient p facteurs égaux à des termes différents de la série

$$x^0,\quad x^b,\quad x^{2b},\ldots,\quad x^{(m-1)b},$$

le terme le moins élevé de x_p est de degré égal à

$$0+b+2b+\ldots+(p-1)b \quad\text{ou}\quad \frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b;$$

donc $\dfrac{x_p}{x^{\frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b}}$ est une fonction entière de x.

3. Dans l'identité (A), remplaçons z par zx^b

$$(1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b}) \times \frac{1+zx^{mb}}{1+z} = \sum_{p=0}^{p=m} (x_p x^{pb} z^p),$$

d'où

$$(B) \qquad (1+z)\sum_{p=0}^{p=m} (x_p x^{pb} z^p) = (1+zx^{mb})\sum_{p=0}^{p=m} (x_p z^p),$$

d'où, $1 \leqq p \leqq m$,

$$(C) \qquad x^{pb} x_p + x^{(p-1)b} x_{p-1} = x_p + x^{mb} x_{p-1}.$$

4. L'identité C donne les identités suivantes :

$$x_p = x^{(p-1)b} \frac{x^{(m+1-p)b} - 1}{x^{pb} - 1} x_{p-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{p+r-1} = x^{(p+r-2)b} \frac{x^{(m+2-p-r)b} - 1}{x^{(p+r-1)b} - 1} x_{p+r-2};$$

multipliant membre à membre,

$$x_{p+r-1} = x^{\frac{2p+r-3}{1}\frac{r}{2}b} \frac{x^{(m+1-p)b} - 1}{x^{pb} - 1} \cdots \frac{x^{(m+2-r-p)b} - 1}{x^{(p+r-1)b} - 1} x_{p-1};$$

posant $p = 1$ et remplaçant r par p,

$$\frac{x_p}{x^{\frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b}} = \frac{x^{mb} - 1}{x^b - 1} \frac{x^{(m-1)b} - 1}{x^{pb} - 1} \cdots \frac{x^{(m+1-p)b} - 1}{x^{bp} - 1}.$$

Or, en vertu du n° 2, le premier membre de cette égalité est une fonction entière de x : il en est donc de même du second. C. Q. F. D