

C. CHADU

**Solution de la question de mathématiques
élémentaires proposée au concours
d'agrégation de 1874**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 175-178

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__175_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1874 ;**

PAR M. C. CHADU.

Étant donné un triangle ABC , on mène par chacun de ses sommets une droite qui partage le côté opposé en deux segments respectivement proportionnels aux carrés des côtés adjacents :

1° Faire voir que les droites partant des trois sommets concourent en un même point M ;

2° Démontrer que si de ce point M on abaisse des perpendiculaires MP , MQ , MR sur les côtés du triangle

ABC, les longueurs MP, MQ, MR sont respectivement proportionnelles aux côtés du triangle ABC, et que le point M est le centre de gravité du triangle PQR formé par les pieds de ces perpendiculaires;

3° Calculer, en fonction des côtés du triangle ABC, la somme $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2$ ainsi que les côtés et l'aire du triangle PQR.

I. — Soient a, b, c les côtés du triangle ABC; AD, BE, CF les droites satisfaisant à l'énoncé.

On aura les relations

$$(1) \quad \frac{BD}{CD} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{AF}{BF} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{a^2}{c^2}.$$

En multipliant ces trois relations membre à membre, on obtient

$$\frac{BD.AF.CE}{CD.BF.AE} = 1,$$

égalité qui montre que les droites considérées se coupent en un même point.

II. — Exprimons que le triangle AMC est la différence des triangles ADC et DMC, nous aurons

$$(2) \quad b.MQ = DC(h - MP),$$

h étant la hauteur du triangle ABC, abaissée du sommet A.

On aurait de même

$$(3) \quad c.MR = BD(h - MP).$$

En divisant membre à membre les équations (2) et (3) et tenant compte des relations (1), on obtient

$$\frac{b.MQ}{c.MR} = \frac{DC}{BD} = \frac{b^2}{c^2}$$

ou bien

$$\frac{MQ}{b} = \frac{MR}{c},$$

par suite

$$\frac{MP}{a} = \frac{MQ}{b} = \frac{MR}{c}.$$

Si l'on remarque que

$$a MP + b MQ + c MR = 2S,$$

S surface du triangle ABC, on a

$$(4) \quad \frac{MP}{a} = \frac{MQ}{b} = \frac{MR}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a aussi

$$(5) \quad \frac{MP}{\sin A} = \frac{MQ}{\sin B} = \frac{MR}{\sin C}.$$

Les triangles PMQ, QMR, RMP ont respectivement pour mesure la moitié des produits

$$MP.MQ \sin C, \quad MR.MQ \sin A, \quad MP.MR \sin B.$$

Les relations (5) montrent que les surfaces de ces trois triangles sont équivalentes; le point M est donc le centre de gravité du triangle PQR.

III. — Des équations (4) on déduit facilement la relation

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2 = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Le triangle PQM donne

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{QM}^2 + 2 PM.QM \cos C.$$

En remplaçant PM et QM par leurs valeurs tirées des équations (4), et remarquant que

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2,$$

on a

$$\overline{PQ}^2 = \frac{4S^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

L'aire du triangle PQR est égale à trois fois l'aire du triangle PMQ; en désignant par S_1 l'aire du triangle PQR, on aura

$$S_1 = \frac{3MP \cdot MQ \sin C}{2} = \frac{6S^2 ab \sin C}{(a^2 + b^2 + c^2)^2};$$

mais $ab \sin C = 2S$; donc

$$S_1 = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Note. — M. Jules Lefebvre, d'Amiens, nous a envoyé une solution de la même question.