

A. TOURRETTES

**Solution d'une question du concours
d'agrégation de 1872**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 99-103

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__99_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION
DE 1872;**

PAR M. A. TOURRETTES.

Déterminer une courbe plane, telle que l'ordonnée y du centre de gravité d'un arc quelconque s , à partir d'une origine fixe, soit une fonction donnée de la longueur de l'arc, la densité ρ en chaque point étant elle-même une fonction donnée de l'arc.

Effectuer les calculs et discuter la courbe, en supposant $\rho = \frac{1}{4}s^3$, $y = s^2$. On pourra examiner, en posant $\rho = ks^m$, $y = hs^\mu$, à quelle condition doivent satisfaire les nombres m et μ , pour que l'intégration puisse être effectuée.

Soit γ_1 l'ordonnée du centre de gravité d'un arc de courbe $s = OM$, compté à partir de l'origine des coordonnées, que je suppose sur la courbe.

J'aurai

$$\gamma_1 = \frac{\int \rho \gamma ds}{\int \rho ds};$$

posons

$$\gamma_1 = F(s), \quad \rho = f(s),$$

et il viendra

$$F(s) \int f(s) ds = \int \gamma f(s) ds.$$

Différentiant les deux membres de l'équation, il vient

$$F'(s) ds \int f(s) ds + F(s) f(s) ds = \gamma f(s) ds,$$

d'où

$$(1) \quad \gamma = \frac{F'(s) \int f(s) ds}{f(s)} + F(s).$$

Telle est l'équation générale des courbes demandées, en fonction de γ et de la longueur de l'arc.

Pour avoir cette équation entre x et y , je pose

$$\gamma = \varphi(s), \quad \text{d'où} \quad dy = \varphi'(s) ds,$$

et, par suite,

$$(2) \quad x + c = \int ds \sqrt{1 - [\varphi'(s)]^2};$$

en éliminant s entre l'équation (1) et (2), on aura l'équation en x et y .

Passons au cas particulier où

$$F(s) = s^2, \quad f(s) = \frac{1}{4} s^3.$$

L'équation (1) donne

$$\gamma = \frac{2s \int \frac{1}{4} s^3 ds}{\frac{1}{4} s^3} + s^2,$$

et

$$\gamma = \frac{2}{3} s^2, \quad \text{ou bien} \quad dx = \sqrt{\frac{1 - 6\gamma}{6\gamma}} dy;$$

c'est l'équation d'une cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est $\frac{1}{\mu}$ et dont l'axe est l'axe des y .

Prenons maintenant le cas où $F(s) = hs^\mu$, $f(s) = ks^m$. Substituant dans l'équation (1), il vient

$$y = \frac{\mu hs^{\mu-1} \int ks^m ds}{ks^m} + hs^\mu,$$

ou

$$y = \left(\frac{\mu}{m+1} + 1 \right) hs^\mu.$$

Telle est l'équation entre l'ordonnée et la longueur de l'arc.

Cherchons l'équation différentielle en x et y . On tire de l'équation précédente

$$y^{\frac{1}{\mu}} = h^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\mu + m + 1}{m + 1} \right)^{\frac{1}{\mu}} s,$$

et, en différentiant les deux membres,

$$\frac{1}{\mu} y^{\frac{1}{\mu}-1} dy = h^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\mu + m + 1}{m + 1} \right)^{\frac{1}{\mu}} ds.$$

Posons

$$h^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\mu + m + 1}{m + 1} \right)^{\frac{1}{\mu}} = \lambda,$$

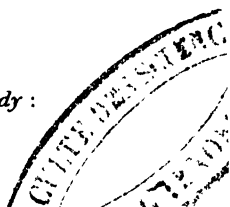
et remplaçons ds par sa valeur $dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$, il vient, après avoir supprimé dy , qui donne une parallèle à l'axe des x , laquelle ne répond pas, évidemment, à la question,

$$\frac{1}{\mu} y^{\frac{1}{\mu}-1} = \lambda \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

d'où

$$(3) \quad dx = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\mu^2} y^{\frac{1}{\mu}-1} - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy;$$

c'est l'équation différentielle cherchée.



Le second membre est une différentielle binôme; appliquons les caractères d'intégrabilité. Le premier caractère donne

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{\mu}-1\right)} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{1-\mu},$$

qui doit être entier; le deuxième caractère donne

$$\frac{1}{2} \frac{\mu}{1-\mu} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\mu},$$

qui doit aussi être un nombre entier. On voit que m n'y entre pas. Posons, n étant un entier,

$$\frac{1}{2} \frac{\mu}{1-\mu} = n,$$

d'où

$$(4) \quad \mu = \frac{n}{\frac{1}{2} + n}.$$

Donnant à n toutes les valeurs entières, positives ou négatives, on aura pour μ des valeurs qui répondent à des cas d'intégrabilité.

La deuxième formule donnerait

$$(5) \quad \mu = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Si nous faisons, dans l'équation (4), $n = -1$, on a $\mu = 2$, c'est le cas considéré en premier lieu. Pour $n = 1$, $\mu = \frac{2}{3}$, et alors l'équation (3) devient

$$dx = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{9}{4} y - \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} dy,$$

$$x = \frac{8}{27\lambda} \left(\frac{9}{4} y - \lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}},$$

la constante étant déterminée par la condition que, pour $y = \frac{4}{9}\lambda^2$, $x = 0$.

La formule (5), pour $n = 1$, donne

$$\mu = \frac{1}{2};$$

par suite

$$dx = \frac{1}{\lambda} (4y^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} dy,$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{1}{2} \left[y \sqrt{4y^2 - \lambda^2} - \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{L} (2y + \sqrt{4y^2 - \lambda^2}) \right] + \text{const.}$$

On détermine la constante par la condition que, pour $x = 0$, $y = \frac{\lambda}{2}$; on trouve

$$\text{const.} = \frac{\lambda^2}{4} \mathbf{L} \frac{\lambda}{2}.$$