

CHEVILLIET

Note sur l'attraction proportionnelle à la distance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 97-99

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__97_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'ATTRACTION PROPORTIONNELLE A LA DISTANCE;

PAR M. CHEVILLIET.

L'attraction proportionnelle à la distance est la seule pour laquelle la durée des oscillations rectilignes soit indépendante de l'amplitude.

Soit $f(x)$ l'attraction, on a

$$dv^2 = -2f(x)dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2 \int_0^x f(x)dx + c$$

et, en posant $\int_0^x f(x)dx = y$,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2y + c.$$

Soit h la valeur de y pour l'abscisse a répondant à l'écart maximum; la vitesse étant nulle alors, on a

$$0 = -2h + c,$$

d'où

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2(h - y),$$

$$dt\sqrt{2} = \frac{-dx}{\sqrt{h-y}}$$

et, pour la durée de la demi-oscillation,

$$t\sqrt{2} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{h-y}},$$

ou, si l'on pose $x = \varphi(y)$,

$$t\sqrt{2} = \int_0^h \frac{\varphi'(y)dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Ainsi le problème est identique avec celui de la tautochrone; on trouvera donc de la même manière

$$x = 2c\sqrt{y},$$

d'où

$$y = \frac{x^2}{4c^2},$$

et la force

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2c^2},$$

C. Q. F. D.

Plus généralement : *L'attraction proportionnelle à la distance est la seule qui puisse faire décrire au mobile une courbe toujours fermée, dans un temps toujours le même, quelles que soient les conditions initiales.*

La démonstration se déduit facilement de ce qui précède, si l'on suppose la courbe symétrique par rapport à deux axes rectangulaires passant par le centre d'attraction; car alors la projection du mobile sur l'un des axes exécute, autour du centre, des oscillations dont la durée est indépendante de l'amplitude : par conséquent la force qui produit son mouvement est proportionnelle à la distance au centre; mais la force qui agit sur le mobile lui-même et le rayon vecteur mené du centre à ce point sont dans le même rapport que leurs projections, ce qui établit la proposition énoncée.

La restriction que nous avons dû faire ici n'est pas nécessaire ; mais pour le prouver nous avons dû recourir à d'autres considérations, comme on le verra dans une autre Note.

Remarque. — Dans le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance :

1° *La somme des carrés des axes de la trajectoire est indépendante de la direction de la vitesse initiale*

$$a^2 + b^2 = \frac{v_0^2}{\mu} + r_0^2;$$

2° *Leur produit ne dépend pas de la composante suivant le rayon vecteur de cette vitesse*

$$ab = \frac{r_0 v_0 \sin a}{\sqrt{\mu}}.$$