

L. SANCERY

Théorèmes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 530-532

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__530_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES ;

PAR M. L. SANCERY, à Nice.

On sait (voir *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. I, p. 19, ligne 3) que les bissectrices des angles opposés d'un quadrilatère complet ABCDEF, tant intérieurs qu'extérieurs, mais pris simultanément : 1^o de même espèce,

2^o d'espèces différentes, sont les sommets de deux quadrilatères complets PQIRSTV, HIKLGJ. Cela étant, on propose de démontrer les théorèmes qui suivent :

I. — *Sur chacun des côtés de l'un quelconque des quadrilatères ABCD, PQRS, HIKL se croisent, et par quatre groupes différents, deux côtés des deux autres quadrilatères.*

II. — *Sur chacune des diagonales de l'un quelconque des quadrilatères ABCDEF, PQIRSTV, HIKLGJ se croisent, et par deux groupes différents, deux diagonales appartenant aux deux autres.* La diagonale du premier quadrilatère est ainsi divisée harmoniquement : elle l'est aussi par les diagonales restantes des deux autres. On peut encore dire, si l'on préfère : *Huit diagonales des quadrilatères ABCDEF, PQIRSTV, HIKLGJ déterminent sur la neuvième une involution de six points, dans laquelle les extrémités de cette dernière diagonale sont les points doubles.*

III. — *Les triangles diagonaux des trois quadrilatères sont semblables et homologues entre eux.* Ils ont pour centre d'homologie le point de rencontre des hauteurs du triangle diagonal relatif au quadrilatère donné ABCDEF.

IV. — *Les cercles circonscrits aux triangles diagonaux des quadrilatères dérivés passent par le point de rencontre des hauteurs du triangle diagonal du premier quadrilatère.*

V. — *Les cercles circonscrits aux quadrilatères formés par les couples des diagonales des quadrilatères ABCDEF, PQIRSTV d'une part, et ABCDEF, HIKLGJ de l'autre, qui comprennent des angles égaux entre eux, forment deux séries de cercles orthogonaux ayant*

pour axes radicaux les droites qui passent par les milieux des diagonales des deux quadrilatères PQIRSTV, HIKLGJ.

VI. — *Le quadrilatère proposé ABCD étant inscriptible, le quadrilatère PQRS, dont les sommets sont les points de rencontre des bissectrices des angles opposés intérieurs ou extérieurs, est également inscriptible.*

Les diagonales intérieures de l'un des deux quadrilatères ABCD, PQRS sont parallèles aux diagonales de l'autre, et la troisième diagonale de l'un passe par les milieux des diagonales de l'autre.

VII. — *Le quadrilatère proposé ABCD étant inscriptible et A'B'C'D', A''B''C''D'' étant les quadrilatères inscriptibles obtenus en menant : 1° les bissectrices des quatre angles du quadrilatère ABCD ; 2° les bissectrices des suppléments de ces angles, le diamètre du cercle O', circonscrit à A'B'C'D', est égal à la somme des rayons des cercles A', C', moins la somme des rayons des cercles B', D', tangents à trois des côtés du quadrilatère ABCD. (Le point A' est supposé l'intersection des bissectrices des angles aigus A et B, A étant plus petit que B.)*

Le diamètre du cercle O'' circonscrit à A''B''C''D'' est égal à la somme des rayons des quatre cercles A'', B'', C'', D'' tangents à trois des côtés du quadrilatère.

On a les mêmes relations pour les cercles O_1, O_2 circonscrits aux quadrilatères $A_1 B_1 C_1 D_1, A_2 B_2 C_2 D_2$, obtenus en menant les bissectrices de deux angles opposés et les bissectrices des suppléments des deux autres angles.

VIII. — *Le centre O du cercle circonscrit à ABCD est le milieu des distances O'O'', $O_1 O_2$.*
