

ÉDOUARD COLLIGNON

**Méthode pour construire avec autant
d'approximation qu'on voudra un triangle
équivalent à un secteur donné**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 389-392

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__389_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODE

pour construire avec autant d'approximation qu'on voudra un triangle
équivalent à un secteur donné;

PAR M. ÉDOUARD COLLIGNON,

Ingénieur des Ponts et Chaussées (*).

Le centre de gravité G d'un arc de cercle homogène AB (*fig. 1*) est situé sur la bissectrice OI de cet arc, à une distance OG du centre égale à $\frac{OA \times AB}{\text{arc } AB}$, ou bien, en appelant a le rayon OA, et θ le demi-angle au centre IOA, à la distance

$$OG = r = \frac{a \sin \theta}{\theta}.$$

Si, par le point G, nous élevons sur OI une perpendiculaire indéfinie $G_1 G'$, les points G_1 et G' , où cette droite rencontre les bissectrices OI, OI' des demi-angles AOI, IOB, seront, en vertu de la symétrie, les centres de gravité des deux arcs AI, BI.

Par la même raison, on obtiendra le centre de gravité G_2 de l'arc AI_1 en élevant en G_1 une perpendiculaire à OG_1 , et en prenant le point où cette droite coupe la bissectrice OI₁ de l'angle I₁ OA.

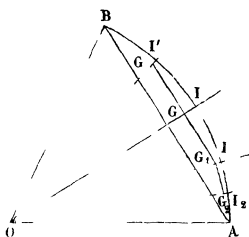
On peut continuer aussi loin qu'on voudra cette construction; elle consiste à déduire le point G_{n+1} du point G_n , en élevant $G_n G_{n+1}$, perpendiculaire sur OG_n , et en

(*) Cette méthode a été l'objet d'une Communication de l'Auteur au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon, en août 1873.

prenant l'intersection de cette droite avec la bissectrice de l'angle $G_n OA$. On aura, de cette manière, les centres de gravité d'arcs qui commencent tous au point A, et qui décroissent comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$. La position limite des points successifs $G, G_1, G_2, \dots, G_n, G_{n+1}$ est le point A lui-même, centre de gravité d'un arc infiniment petit commençant au point A.

On passera par conséquent du point G au point A par la construction des points $G, G_1, G_2, \dots$: en pratique, dès qu'on aura atteint un angle $G_n OA$ assez petit, la solution pourra s'achever approximativement, soit en

Fig. 1.



traçant un arc de cercle du point O comme centre avec OG_n pour rayon, soit en prolongeant jusqu'à OA la perpendiculaire $G_n G_{n+1}$.

Cela posé, je dis que le triangle OGA (*fig. 2*) est équivalent au secteur OGH, décrit du point O comme centre avec OG pour rayon.

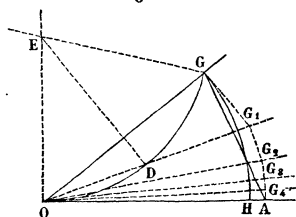
En effet, le secteur a pour mesure $\frac{1}{2} r^2 \theta$, et le triangle $\frac{1}{2} r a \sin \theta$; or ces deux mesures sont égales, en vertu de la relation

$$r = a \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Il est facile de reconnaître aussi que l'arc de cercle ODG, passant par les points O et G, et tangent en O à la

droite OA, a une longueur égale à la quantité OA elle-même. Le point E, centre de cet arc ODG, sera situé sur

Fig. 2.



la perpendiculaire à OA, élevée au point O. L'angle OEG sera double de l'angle GOA, c'est-à-dire égal à 2θ ; et, par suite,

$$\text{arc OG} = 2 \text{EO} \times \theta.$$

Or

$$\text{EO} = \frac{\frac{1}{2} \text{OG}}{\cos \text{EOG}} = \frac{\text{OG}}{2 \sin \theta}.$$

Donc

$$\text{arc OG} = \text{OG} \times \frac{\theta}{\sin \theta} = \frac{r\theta}{\sin \theta} = a = \text{OA}.$$

La construction indiquée plus haut conduit donc aussi à la rectification de l'arc de cercle ODG : il suffit d'opérer sur l'angle formé par la corde de l'arc et la tangente.

De ces considérations de Statique, on déduit très-simplement certaines formules de Trigonométrie, par exemple :

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \lim. \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \dots \cos \frac{\theta}{2^n} \right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim. \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \dots},$$

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta},$$

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \dots + \sin (2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}.$$

Enfin on peut en déduire une méthode *graphique* très-simple pour diviser un arc de cercle en un nombre donné de parties égales.

Voir à ce sujet la *Statique* de l'auteur (Hachette, 1873, p. 277 et suiv.).