

G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 189-198

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__189_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 138);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

169. PROBLÈME. — *Déterminer l'ordre du contact de deux courbes, et trouver le cercle osculateur d'une courbe donnée.* — Supposons que les deux courbes soient exprimées par

$$OM \curvearrowright F(t), \quad ON \curvearrowright f(u), \quad ,$$

et que u soit une fonction indéterminée de t , laquelle reçoit une valeur particulière qui donne $OM \curvearrowright ON$,

c'est-à-dire que M soit le point commun aux deux courbes. Attribuons à t l'accroissement infiniment petit ω , et déterminons la fonction u de manière que la droite

$$M'N' \simeq ON' - OM' \simeq \omega^{n+1} OP$$

soit la plus petite possible, OP étant une droite finie. Le nombre n sera l'ordre du contact.

Pour les points non singuliers, c'est-à-dire généralement, n est un nombre entier, parce qu'à l'accroissement ω correspondent

$$OM' \simeq OM + \omega \odot M + \frac{\omega^2}{2} \odot^2 M + \dots,$$

$$ON' \simeq ON + \dots,$$

$$M'N' \simeq \omega (\odot N - \odot M) + \frac{\omega^2}{2} (\odot^2 N - \odot^2 M) + \dots$$

Ainsi le contact est au moins du second ordre, lorsqu'on peut satisfaire aux trois équipollences

$$OM \simeq ON, \quad \odot M \simeq \odot N, \quad \odot^2 M \simeq \odot^2 N.$$

170. Prenons pour exemple la parabole

$$OM \simeq t^2 + t\sqrt{u},$$

et la circonférence

$$ON \simeq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{u} + (1 - \sqrt{u})(1 - \varepsilon^u),$$

qui ont un point commun correspondant à

$$t = \frac{1}{2}, \quad u = 0.$$

La relation

$$\odot M \simeq \odot N$$

donne l'équipollence

$$2t + \sqrt{u} \simeq (\sqrt{u} + 1)\varepsilon^u \odot u,$$

qui est satisfaite par

$$\odot u = -1.$$

De même, la relation

$$\mathbb{O}^2 M \simeq \mathbb{O}^2 N,$$

ou

$$2 \simeq -(\sqrt{+1})(\mathbb{O}^2 u + \sqrt{\mathbb{O} u^2}) \varepsilon^u,$$

est satisfaite par

$$\mathbb{O}^2 u = -1.$$

Mais on ne pourrait pas ensuite avoir

$$\mathbb{O}^3 M \simeq \mathbb{O}^3 N,$$

quelle que fût la valeur réelle de $\mathbb{O}^3 u$. Donc le contact entre la parabole et le cercle est du second ordre.

171. Si l'on avait à comparer deux mouvements au lieu de deux courbes, u serait donné en fonction de t , et, par suite, l'*osculat*ion des deux mouvements pourrait être moindre que celle des courbes. Ainsi le mouvement parabolique des corps pesants, exprimé par

$$OM \simeq t^2 + tP\sqrt{,}$$

et le mouvement circulaire uniforme, exprimé par

$$ON \simeq \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{+} + (\sqrt{-1}) \varepsilon^{\frac{1}{2}-t},$$

donnent, pour $t = \frac{1}{2} + \omega$,

$$M'N' \simeq - (1 + \sqrt{+}) \frac{\omega^2}{2}.$$

Par suite, l'*osculat*ion des deux mouvements est seulement du premier ordre.

172. Au moyen des principes établis déjà, il sera facile de déterminer le cercle osculateur à une courbe donnée en l'un de ses points M . Si R en est le centre, la circonférence de ce cercle est exprimée par l'équipollence

$$ON \simeq OR + \varepsilon^u RM.$$

Pour prendre les dérivées, il faut considérer OR, RM comme constantes, ce qui donne

$$\begin{aligned}\odot N &\triangleq \sqrt{\varepsilon^u} \odot u RM, \\ \odot^2 N &\triangleq (\sqrt{\odot^2 u} - \odot u^2) \varepsilon^u RM,\end{aligned}$$

expressions dans lesquelles on devra faire $u = 0$, cette valeur étant celle qui fait coïncider N avec M.

Pour que le contact soit du second ordre, on devra avoir

$$\begin{aligned}\odot M &\triangleq \sqrt{\odot u} RM, \\ \odot^2 M &\triangleq (\sqrt{\odot^2 u} - \odot u^2) RM.\end{aligned}$$

Les divisant l'une par l'autre, la relation du n° 164 nous donne

$$1 + \lambda \sqrt{\frac{\odot^2 u}{\odot u}} + \sqrt{\odot u},$$

en sorte que

$$\lambda = \odot u,$$

et la relation

$$\odot M \triangleq \sqrt{\odot u} RM$$

est identique avec la relation (2) du n° 63.

173. L'enveloppe de toutes les droites MS, qui forment avec les tangentes

$$MT \triangleq \odot M$$

l'angle constant α , se trouve résulter du n° 163 en posant

$$MS \triangleq p \varepsilon^u \odot M,$$

puis en déterminant p de manière que $\odot S$ soit parallèle à cette même droite MS. On trouve ainsi

$$(9) \quad MS \triangleq \sin \alpha \frac{\varepsilon^u}{\sqrt{\quad}} MR,$$

relation connue entre les points S d'une développée im-

parfaite, et les points R de la développée proprement dite.

174. PROBLÈME. — *Déterminer la courbe P parallèle à une courbe donnée M, c'est-à-dire ayant avec elle toutes les normales MP communes.* — Le point P appartenant à la normale de la courbe donnée au point M, on aura

$$OP \simeq OM + p\sqrt{\omega M}.$$

En outre, la tangente en P, qui est déterminée en direction par

$$\omega P \simeq \omega M + p\sqrt{\omega^2 M} + \sqrt{\omega} p \omega M,$$

doit être parallèle à la tangente ωM . Multipliant par $cj.\omega M$, nous aurons

$$p\sqrt{cj.\omega M \omega^2 M} + \sqrt{\omega} p \omega M cj.\omega M$$

parallèle à $\omega M cj.\omega M$, c'est-à-dire d'inclinaison nulle, et, par conséquent, équipollente à sa propre conjuguée

$$- p\sqrt{\omega M} cj.\omega^2 M - \sqrt{\omega} p \omega M cj.\omega M.$$

Il en résulte

$$- 2 \frac{\omega p}{p} = \frac{\omega^2 M}{\omega M} + cj.\frac{\omega^2 M}{\omega M},$$

et, revenant aux fonctions primitives,

$$p = c : \sqrt{\omega M} cj.\omega M.$$

Donc la distance des deux courbes est

$$(10) \quad MP \simeq c\sqrt{\omega M : cj.\omega M},$$

c'est-à-dire de grandeur constante, et les deux courbes sont vraiment parallèles. Avec les formules du n° 164, on a

$$p = ce^{-\int t dt}.$$

175. Ces calculs seraient devenus plus rapides en posant [168, (7)]

$$dM \simeq \varepsilon^\gamma ds.$$

Supposons plus généralement que la droite MP forme avec la tangente un angle constant α , on aura

$$OP \simeq OM + p\varepsilon^{\alpha+\gamma} \oslash s,$$

et si la tangente

$$\oslash P \simeq \varepsilon^\gamma \oslash s + p\varepsilon^{\alpha+\gamma} (\oslash^2 s + \sqrt{\oslash s \oslash p}) + \varepsilon^{\alpha+\gamma} \oslash p \oslash s$$

doit être parallèle à $\oslash M$, on aura aussi

$$\begin{aligned} p\varepsilon^\alpha (\oslash^2 s + \sqrt{\oslash s \oslash p}) + \varepsilon^\alpha \oslash p \oslash s \\ = p\varepsilon^{-\alpha} (\oslash^2 s - \sqrt{\oslash s \oslash p}) + \varepsilon^{-\alpha} \oslash p \oslash s. \end{aligned}$$

En remontant aux fonctions primitives, on a

$$p \oslash s = ca^{-\gamma},$$

c étant la constante arbitraire, et a étant égal à $e^{\cot \alpha}$; par suite

$$(11) \quad MP \simeq ca^{-\gamma} \varepsilon^{\alpha+\gamma}.$$

Donc toutes les droites MP, qui sont coupées sous un angle égal et constant par les deux courbes M, P, sont respectivement équipollentes aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique (166) qui coupe ces rayons sous le même angle.

176. PROBLÈME. — Déterminer les développées d'une courbe donnée M, c'est-à-dire les trajectoires orthogonales de ses tangentes MT. — Appelons T le point de la trajectoire cherchée, et posons

$$OT \simeq OM + q \oslash M.$$

La tangente à la courbe T est donnée par

$$\oslash T \simeq (1 + \oslash q) \oslash M + q \oslash^2 M$$

(195)

et doit être perpendiculaire à $\mathbb{D}\mathbf{M}$; on aura par suite, selon la supposition habituelle,

$$(4) \quad \mathbb{D}^2\mathbf{M} : \mathbb{D}\mathbf{M} \underline{\wedge} l + \lambda \sqrt{}, \\ 1 + \mathbb{D}q + q^l = 0,$$

et de là

$$(12) \quad \mathbf{MT} \underline{\wedge} - e^{-\int l dt} \int e^{\int l dt} dt \mathbb{D}\mathbf{M} \quad (*).$$

177. Les calculs sont plus rapides si l'équipollence de la courbe $\mathbf{M}$ est donnée sous la forme (7); alors, posant

$$\mathbf{MT} \underline{\wedge} q^{\varepsilon^2},$$

on aura

$$\mathbb{D}\mathbf{T} \underline{\wedge} \varepsilon^2 (\mathbb{D}s + \mathbb{D}q) + q \sqrt{\varepsilon^2} \mathbb{D}q,$$

et cette droite devra être perpendiculaire à ε^2 , c'est-à-dire que

$$\mathbb{D}s + \mathbb{D}q = 0.$$

Revenant aux fonctions primitives, on a

$$q = c - s,$$

et de là

$$(13) \quad \mathbf{MT} \underline{\wedge} (c - s) \varepsilon^2.$$

Il nous sera facile de démontrer que la développante $\mathbf{T}$ a pour développée la courbe $\mathbf{M}$. Nous avons en effet

$$\mathbb{D}\mathbf{T} \underline{\wedge} (c - s) \sqrt{\varepsilon^2} \mathbb{D}q$$

et (supposant pour abréger $\mathbb{D}q$ constant)

$$\mathbb{D}^2\mathbf{T} \underline{\wedge} (s - c) \varepsilon^2 \mathbb{D}q^2 - \sqrt{\varepsilon^2} \mathbb{D}q \mathbb{D}s;$$

par suite, la relation (4) (164) donne, par rapport à la courbe $\mathbf{T}$,

$$\lambda = \mathbb{D}q,$$

(*) Ce résultat suppose l'intégration de l'équation différentielle $1 + \mathbb{D}q + q^l = 0$, qu'on laisse au lecteur le soin d'effectuer.

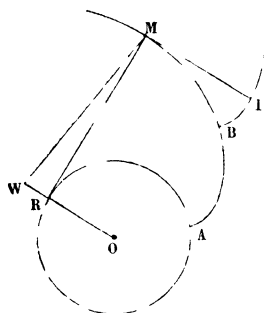
(Note du Traducteur.)

et le rayon de courbure en T est

$$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\omega T} \approx (s - c) \varepsilon \approx \mathbf{TM}.$$

OR $\text{ⲉ} \text{ⲓ}$ (fig. 35).

Fig. 35.


$$\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_\varphi,$$

OR $\leq \int \varepsilon^c d\varphi.$

$$OM \approx (1 - \varphi \sqrt{\epsilon}) \epsilon^{\frac{1}{2}}.$$
$$\text{OM} \stackrel{\sim}{=} \int \mathfrak{e}^{\varphi} \varphi d\varphi.$$
$$Ds \triangleq \varphi(D)\varphi \quad \text{et} \quad MT \triangleq (c - \frac{1}{2}\varphi^2)\varepsilon_T.$$

De là

$$OT \simeq (1 + c - \varphi\sqrt{c + \frac{1}{2}\varphi^2}) \varepsilon^2 \simeq \int \varepsilon^2 (c - \frac{1}{2}\varphi^2) d\varphi.$$

Le rayon de courbure BT en T est $c - \frac{1}{2}\varphi^2$; celui de sa développée M est φ , et celui de R est égal à 1.

179. *Déterminer la direction de la droite MW qui, partant d'un point M d'une courbe, divise en deux parties égales la corde infiniment voisine parallèle à la tangente en M; trouver de plus la parabole ayant avec la courbe un contact du troisième ordre. Ce problème est le dernier de la Géométrie de position. Je l'ai résolu n° 25 de mon Essai (1835), avant les solutions données par M. Transon (1841) et par Dupin (1848).*

Si N, L sont les deux points de la courbe qui correspondent à $t + \omega$ et à $t - \psi$, on a

$$ON \simeq OM + \omega \odot M + \frac{\omega^2}{2} \odot^2 M + \dots,$$

$$OL \simeq OM - \psi \odot M + \dots,$$

$$LN \simeq (\omega + \psi) \odot M + \frac{1}{2}(\omega^2 - \psi^2) \odot^2 M + \frac{1}{6}(\omega^3 + \psi^3) \odot^3 M + \dots,$$

et, pour que cette droite soit parallèle à la tangente $\odot M$, il faudra que l'expression

$$3(\omega - \psi) \odot^2 M + (\omega^2 - \omega\psi + \psi^2) \odot^3 M$$

le soit également; cette expression, multipliée par la quantité réelle $\frac{1}{6}(\omega + \psi)$ et composée avec $(\omega + \psi) \odot M$, donnera la droite LN (*).

ω , ψ devant être infiniment petits, il faudra que $\omega - \psi$ soit un infiniment petit du second ordre, comme

(*) On néglige évidemment ici les infiniment petits d'ordre supérieur, ce qui est du reste parfaitement licite.

(Note du Traducteur.)

(198)

l'est $\omega^2 = \omega\psi + \psi^2$. Posant

$$\omega - \psi = q\omega^2,$$

nous devons déterminer la quantité réelle q , de manière que l'on ait

$$(14) \quad 3q \odot^2 \mathbf{M} + \odot^3 \mathbf{M} \simeq r \odot \mathbf{M},$$

r étant aussi réel; d'après quoi la direction de la droite, qui joint le point $\mathbf{M}$ au milieu de $\mathbf{LN}$, sera donnée par l'équipollence

$$\text{ou} \quad \mathbf{MN} + \mathbf{ML} \simeq (\omega - \psi) \odot \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\omega^2 + \psi^2) \odot^2 \mathbf{M},$$

$$(15) \quad \mathbf{MW} \simeq q \odot \mathbf{M} + \odot^2 \mathbf{M}.$$

(*A suivre.*)