Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 106-112
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__106_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1073

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 144);

PAR M. C. MOREAU.

L'équation

$$x^3 - \frac{4+p}{3}x^2 + \frac{p(1+p)}{2.3}x + \frac{(2-p)p(1+p)}{2.3} = 0,$$

dans laquelle $0 < p < 1$, *a une racine* α *comprise entre zéro et l'unité, et l'on a*

$$\int_0^\alpha x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx$$

$$+ \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\int_0^{1-\alpha} x^{1+p}(1-x)^{2-p}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(S. REALIS.)

Faisons, dans la seconde intégrale, $x = 1 - y$, il viendra

$$\int_0^{1-\alpha} x^{1+p}(1-x)^{2-p}\,dx$$

$$= -\int_1^{\alpha} y^{2-p}(1-y)^{1+p}\,dy = \int_\alpha^1 x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx - \int_0^\alpha x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx$$

$$= -\int_0^\alpha x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx + \frac{\Gamma(3-p)\Gamma(2+p)}{\Gamma(5)}$$

$$= -\int_0^\alpha x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx + \frac{(2-p)(1-p)(1+p)p}{1.2.3.4}\,\frac{\pi}{\sin p\pi},$$

et l'équation qu'il s'agit de vérifier devient

$$\int_0^\alpha x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx$$

$$- \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\int_0^\alpha x^{2-p}(1-x)^{1+p}\,dx = 0.$$

Cherchons l'intégrale générale du premier membre de cette équation; pour cela, posons $\frac{x}{1-x} = y$, ce qui donne

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+y} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2};$$

'expression à intégrer sera

$$\int \frac{y^{-p}\,dy}{1+y} - \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\int \frac{y^{2-p}\,dy}{(1+y)^5}.$$

En intégrant maintenant quatre fois de suite, par parties, la seconde intégrale, on a

$$\int \frac{y^{2-p}\,dy}{(1+y)^5} = -\frac{y^{2-p}}{4(1+y)^4} - \frac{2-p}{4.3}\,\frac{y^{1-p}}{(1+y)^3}$$
$$-\frac{(2-p)(1-p)}{4.3.2}\,\frac{y^{-p}}{(1+y)^2} + \frac{(2-p)(1-p)p}{4.3.2.1}\,\frac{y^{-p-1}}{1+y}$$
$$+\frac{(2-p)(1-p)p(1+p)}{4.3.2.1}\int \frac{y^{-p-2}\,dy}{1+y};$$

en remplaçant cette valeur dans l'expression précédente, il restera, indépendamment des termes connus,

$$\int \frac{y^{-p}\,dy}{1+y} - \int \frac{y^{-p-2}\,dy}{1+y} = \int y^{-p-2}(y-1)\,dy$$
$$= -\frac{y^{-p}}{p} + \frac{y^{-p-1}}{1+p},$$

et l'intégrale générale cherchée sera

$$\frac{2.3}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\left[\frac{y^{2-p}}{(1+y)^4} + \frac{2-p}{3}\,\frac{y^{1-p}}{(1+y)^3}\right.$$
$$+\frac{(2-p)(1-p)}{2.3}\,\frac{y^{-p}}{(1+y)^2} - \frac{(2-p)(1-p)p}{2.3}\,\frac{y^{-p-1}}{1+y}$$
$$\left.-\frac{(2-p)(1-p)(1+p)}{2.3}y^{-p} + \frac{(2-p)(1-p)p}{2.3}\,y^{-p-1}\right].$$

Revenons maintenant à la variable x en posant

$$y = \frac{x}{1-x};$$

simplifions et ordonnons par rapport à x, nous obtiendrons, sans tenir compte de la constante introduite par l'intégration,

$$\frac{2.3\,x^{1-p}(1-x)^p}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\left[x^3 - \frac{4+p}{3}x^2 + \frac{p(1+p)}{2.3}x\right.$$
$$\left.+\frac{(2-p)p(1+p)}{2.3}\right].$$

Or on voit que, p étant plus petit que 1 et positif, cette quantité est nulle pour la limite inférieure $x = 0$; l'intégrale définie est donc

$$\frac{2.3\alpha^{1-p}(1-\alpha)^p}{(2-p)(1-p)p(1+p)}\left[\alpha^3 - \frac{4+p}{3}\alpha^2 + \frac{p(1+p)}{2.3}\alpha + \frac{(2-p)p(1+p)}{2.3}\right],$$

et elle est effectivement nulle si α est racine de l'équation du troisième degré donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Bignon, à Lima; J. Mister, répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique; et Brocard.

Question 1091

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

Par M. GENTY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Les faces d'un dièdre droit doivent rester tangentes à un ellipsoïde donné, et l'arête de ce dièdre doit rencontrer deux droites fixes quelconques. On demande le lieu de cette arête. (Mannheim.)

Soient D et Δ les deux droites données; nous allons chercher combien de génératrices du lieu passent par un point quelconque m de la droite D.

Soit P le plan mené par le point m et la droite D; le problème revient à chercher combien il y a de droites, passant par le point m, situées dans le plan P, et telles que les plans tangents, menés par chacune de ces droites à l'ellipsoïde donné, se rencontrent sous un angle droit

Or les plans tangents à l'ellipsoïde, menés par le point m, enveloppent un cône du second degré; et le lieu des droites qui passent par le sommet d'un cône du second ordre, et qui sont telles que les plans tangents menés au cône par chacune de ces droites forment un dièdre droit, est aussi un cône du second ordre. Ce cône coupe le plan P suivant deux droites $m\mu$, $m\mu'$; ce sont les génératrices de la surface gauche cherchée qui passent au point m.

Il est évident que par le point μ de la droite Δ passent de même deux génératrices de la surface.

Donc la surface cherchée est le lieu décrit par une droite qui réunit les points correspondants de deux séries de points $m, m', \ldots, \mu, \mu', \ldots$, faites sur deux droites D et Δ, et telles qu'à un point m correspondent deux points μ, et à un point μ deux points m.

Donc le lieu cherché est une surface gauche du quatrième ordre sur laquelle les droites D et Δ sont des droites doubles.

Nota. — Le théorème sur lequel nous nous sommes appuyé n'est qu'un cas particulier du suivant :

On donne deux cônes du second ordre C *et* C′ *ayant le même sommet* S; *le lieu des droites passant par le point* S, *et telles que les plans tangents menés par ces droites aux cônes* C *et* C′ *forment deux couples de plans en rapport harmonique, est aussi un cône du second degré* (Γ), *qui passe par les huit arêtes de contact des plans tangents communs aux deux cônes donnés.*

Ce théorème lui-même résulte immédiatement du théorème analogue sur les coniques.

Si l'on suppose que l'un des cônes donnés S′ est la sphère infiniment petite qui a son centre au sommet de l'autre cône, on a le cas particulier sur lequel nous nous sommes appuyé.

Dans le cas général, les trois cônes S, S′ et Γ ont un système de diamètres conjugués commun. Dans le cas particulier qui nous occupe, les cônes S et Γ ont les mêmes axes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey et Brocard.

Question 1128

(voir même tome, p. 64);

Par M. V.-A. LEBESGUE.

Si un nombre premier, P, *est égal à la somme de trois carrés,* P^2 *est généralement égal aussi à la somme de trois carrés; il ne pourrait y avoir d'exception que si* P *était décomposable en deux carrés* (*).

(Catalan.)

On a identiquement

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

On a de même aussi, identiquement,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

De là

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2 + 4(ad-bc)^2.$$

Pour $d=0$,

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+4a^2c^2+4b^2c^2.$$

Ainsi le carré d'une somme de trois carrés est aussi, en général, une somme de trois carrés.

(*) Encore n'est-il pas sûr que ce cas d'exception puisse se présenter : le nombre premier $29=16+9+4=25+4$; néanmoins $29^2=24^2+16^2+3^2$.

Dans la note, à l'équation

$$29^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2,$$

on pourrait joindre

$$29^2 = 21^2 + 16^2 + 12^2.$$

Note du Rédacteur. — M. *Charles Chabanel* a résolu la même question. Sa solution ne diffère de celle de M. Le Besgue qu'en ce qu'elle se fonde *immédiatement* sur l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2b^2 + 4b^2c^2,$$

facile à vérifier.

M. Chabanel remarque : 1° que la proposition énoncée existe lorsque le nombre P est quelconque (premier ou non premier), ce qui est bien évident, puisque l'identité précédente ne suppose en rien que $a^2 + b^2 + c^2$ soit un nombre entier premier ; 2° que, en écartant certains cas particuliers, le nombre P^2 est, en général, décomposable en trois systèmes différents de trois carrés.