

SABININE

**Sur l'accélération normale à la trajectoire  
d'un point d'un système invariable mobile  
dans son mouvement le plus général**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1873), p. 257-265

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1873\\_2\\_12\\_\\_257\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__257_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**SUR L'ACCELERATION NORMALE A LA TRAJECTOIRE D'UN POINT  
D'UN SYSTEME INVARIABLE MOBILE  
DANS SON MOUVEMENT LE PLUS GENERAL;**

**PAR M. SABININE,**

Professeur a l'Universite d'Odessa.

---

M. H. Resal, dans un Mémoire remarquable sur la Cinématique, intitulé : *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide* (\*), donne pour l'accélération normale (p. 239) une expres-

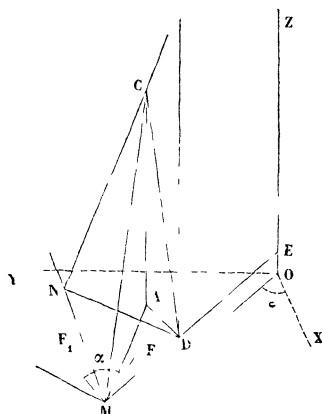
---

(\*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, 37<sup>e</sup> Cahier, p. 227; 1858.  
*Ann. de Mathémat.*, 2<sup>e</sup> serie, t. XII. (Juin 1873.)

sion qui n'a pas lieu en général, et qui n'est applicable qu'au cas où l'accélération totale rencontre l'axe instantané. C'est ce que nous allons démontrer, en donnant en même temps l'expression de l'accélération normale pour le cas le plus général.

Soient (*fig. 1*) OE l'axe instantané de rotation et de

Fig. 1.



glissement, et O le point où l'axe instantané est coupé par sa plus courte distance à sa position suivante; M un point du système;  $\phi$  l'accélération totale de M, représentée sur la *fig. 1* par MC;  $r$  la distance de M à l'axe instantané OE, représentée par ME; MF<sub>1</sub> la tangente en M au cercle que décrirait ce point en tournant autour de l'axe OE; MF la tangente et MN la normale principale en M à la trajectoire de ce point M. Toutes ces droites sont rapportées à trois axes rectangulaires, tels que les choisit M. Resal dans son *Mémoire* cité : pour l'origine des trois axes coordonnés, nous prenons le point O; pour l'axe Z, l'axe instantané, en supposant

que les axes  $X$  et  $Y$  soient perpendiculaires entre eux et à l'axe  $OZ$ ; tandis que l'axe  $OX$  est dirigé suivant la vitesse orthogonale. En menant perpendiculairement les deux droites  $AD$  et  $AC$ , la première à  $MD$  et la seconde au plan  $EMF_1$ , on voit que la droite  $CD$  sera perpendiculaire à  $MD$ ; par conséquent, cette droite  $MD$  est perpendiculaire au plan  $CAD$  et, de plus, au plan  $FMF_1$ , qui est parallèle à l'axe  $OZ$ ; d'où il résulte que : 1° le plan normal, passant par  $MD$ , rencontre l'axe instantané  $OZ$  dans le point  $E$ ; 2° le plan  $CAD$ , passant par le point  $C$ , est perpendiculaire au plan normal. Or, l'accélération totale  $\varphi$  étant dans le plan osculateur  $FMN$ , la perpendiculaire  $CN$ , abaissée du point  $C$  sur la normale principale  $MN$ , sera aussi perpendiculaire au plan normal; donc la droite  $CN$  se trouve dans le plan  $CAD$  et la droite  $ND$  est perpendiculaire à  $MD$ , comme l'intersection du plan  $CAD$  avec le plan normal.

Soient  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  les composantes de l'accélération  $\varphi$  parallèles aux axes  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , égales respectivement au second membre de la seconde, de la troisième et de la première des équations (8) (p. 239) de M. Resal.

Appelant  $\varphi_n$  l'accélération normale et  $\varphi_t$  l'accélération tangentielle, nous aurons

$$(1) \quad \varphi = \sqrt{\varphi_n^2 + \varphi_t^2}.$$

En désignant par  $S$  la projection de l'accélération  $\varphi$  sur la droite  $ME$  et par  $S_1$  la projection de l'accélération  $\varphi_n$  sur le plan  $CAD$ , le triangle rectangle  $MND$  donnera

$$(2) \quad \varphi_n = \sqrt{S^2 + S_1^2}.$$

Nommons  $L$  la vitesse de glissement,  $\omega$  la vitesse angulaire instantanée autour de  $OE$ , et  $\alpha$  l'angle que forme  $\omega r$

avec la vitesse  $v = \sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}$  du point M; alors

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} a = \frac{L}{\omega}, \\ \cos a = \frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}, \\ \sin a = \frac{L}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}. \end{array} \right.$$

Soient

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  les trois angles que forme  $S_1$  respectivement avec les trois axes OX, OY, OZ;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  les trois angles que forme  $\varphi_1$  respectivement avec les mêmes axes;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  les trois angles que forme  $\omega r$  respectivement avec les mêmes axes;

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  les trois angles que forme  $\varphi_n$  respectivement avec les mêmes axes, et

$\epsilon$  l'angle que forme  $d$  avec l'axe OX.

Comme l'angle  $\alpha_3$  est égal à l'angle  $a$ , nous aurons les équations suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_1 = \cos a \cos \gamma_1, \\ \cos \beta_2 = \cos a \cos \gamma_2, \\ \cos \beta_3 = \sin a, \end{array} \right.$$

et

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_1 = -\sin a \sin \epsilon, \\ \cos \alpha_2 = \sin a \cos \epsilon, \end{array} \right.$$

qui lient les angles  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  d'une part, et les angles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, \epsilon$  d'autre part.

En observant que la projection de  $S$  sur l'axe OZ est nulle, et en considérant chacune des trois projections de  $\varphi_n$  sur les trois axes OX, OY, OZ comme la somme

des deux projections de  $S$  et de  $S_1$  respectivement sur les mêmes trois axes  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_n \cos \delta_1 = S \cos \varepsilon + S_1 \cos \alpha_1, \\ \varphi_n \cos \delta_2 = S \sin \varepsilon + S_1 \cos \alpha_2, \\ \varphi_n \cos \delta_3 = S_1 \cos \alpha_3 = S_1 \cos a, \end{cases}$$

qui servent à déterminer les angles  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ . De ces équations (6), on tire

$$(7) \quad \begin{cases} \cos \delta_1 = \frac{S \cos \varepsilon + S_1 \cos \alpha_1}{\varphi_n} = \frac{S \cos \varepsilon - S_1 \sin a \sin \varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos \delta_2 = \frac{S \sin \varepsilon + S_1 \cos \alpha_2}{\varphi_n} = \frac{S \sin \varepsilon + S_1 \sin a \cos \varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos \delta_3 = \frac{S_1 \cos a}{\varphi_n} = \frac{S_1 \omega r}{\varphi_n \sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}. \end{cases}$$

Tout cela posé, il est facile d'obtenir l'expression de l'accélération normale pour le cas le plus général. En effet, comme  $S$  est égal à

$$(8) \quad S = X \frac{x}{d} + Y \frac{y}{d},$$

il ne reste qu'à déterminer  $S_1$ .

En considérant la projection de l'accélération totale  $\varphi$  sur l'axe  $OZ$  comme la somme des deux projections de  $\varphi_n$  et de  $\varphi_t$  sur le même axe  $OZ$ , nous aurons

$$(9) \quad \varphi_n \cos \delta_3 + \varphi_t \cos \beta_3 = Z.$$

Or,  $\varphi_n \cos \delta_3 = S_1 \cos a$ ,  $\cos \beta_3 = \sin a$ , l'égalité (9) donnera

$$(10) \quad S_1 \cos a = Z - \sin a \varphi_t.$$

Ayant égard à ce que l'accélération tangentielle  $\varphi_t$  est

égale à

$$(11) \quad \varphi_t = X \cos \beta_1 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \beta_3,$$

et, en substituant dans l'égalité (10) cette valeur  $\varphi_t$ , et les valeurs  $\cos \beta_1$ ,  $\cos \beta_2$ ,  $\cos \beta_3$ , données par les formules (4), nous obtiendrons, toutes réductions faites,

$$(12) \quad S_1 = Z \cos a - W \sin a,$$

où la quantité  $W$ , étant la projection de  $X$  et de  $Y$  sur la tangente  $MF_1$ , est égale à

$$(13) \quad W = X \cos \gamma_1 + Y \cos \gamma_2.$$

Si l'on compare nos formules (2), (8) et (12) avec les formules de M. H. Resal (9), (10), et celle qu'on lit à la dernière ligne de la page 239 de son Mémoire cité, on conclura que M. H. Resal pose  $S_1 = Z \cos a$ . Or il est évident que cette dernière égalité aura lieu dans le seul cas où le point  $A$  se trouve sur la droite  $ME$ , c'est-à-dire où l'accélération totale  $\varphi$ , représentée par  $MC$ , rencontre  $DB$  parallèle à  $AC$ , et, par conséquent, rencontre aussi l'axe instantané  $OZ$ . C'est ce qu'il fallait démontrer.

D'après nos formules (7), il est facile de voir comment il faut corriger les formules données par M. H. Resal pour  $\cos \delta_1$ ,  $\cos \delta_2$ ,  $\cos \delta_3$ , qu'il désigne respectivement par  $\cos(\rho, x)$ ,  $\cos(\rho, y)$ ,  $\cos(\rho, z)$ . De plus, il est à observer que  $S_1$  (12) se réduit à  $Z$  dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; car  $\sin a$ , étant multiplicateur de  $W$ , est proportionnel à la vitesse  $L$ , qui est nulle dans ce cas particulier; alors le radical  $\sqrt{S^2 + S_1^2}$  se réduit à  $\sqrt{S^2 + Z^2}$ , qui, comme l'on sait, exprime l'accélération normale dans le cas de la rotation autour d'un centre fixe,

M. Schell, dans son savant Ouvrage : *Theorie der Bewegung und der Kräfte* (p. 420-421), détermine

l'accélération normale, mais obtient pour cette accélération une expression incorrecte, par la seule raison qu'il commet une erreur, ou plutôt un *erratum*, qui consiste dans la fausseté de l'égalité suivante :

$$W \cos \left( \frac{\pi}{2} + tt' \right) = - W \cos(tt').$$

En introduisant cette erreur dans la détermination de  $S_1$ , il obtient pour  $\varphi_n$  une expression qui ne se réduit pas à l'expression de l'accélération normale dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; car,  $\cos(tt')$  étant proportionnel à  $\omega r$ , le membre multiplié par  $W$ , dans l'expression générale de  $\varphi_n$  donnée par M. Schell, ne s'évanouit pas, tandis que  $-\sin(tt')$ , qui est égal à  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + tt'\right)$ , est proportionnel à la vitesse de glissement, et cette vitesse est nulle dans le cas du mouvement autour d'un point fixe; par conséquent, en ajoutant le produit  $-W \sin(tt')$  à telle partie de l'accélération  $S_1$  qui forme la projection de  $Z$  sur la direction du même  $S_1$  et qui est égale à  $Z \cos a$ , nous aurons pour  $S_1$  l'expression qui, comme nous venons de le voir dans le cas du mouvement autour d'un point fixe, se réduit simplement à  $Z$ .

Il est juste d'ajouter ici encore la remarque suivante : M. Schell, pour le cosinus de l'angle que forme l'accélération normale avec l'axe instantané, et qu'il désigne par  $\mu$ , donne (p. 421) l'expression

$$\cos \mu = \frac{T \sin \alpha}{\sqrt{r^2 \omega^2 + T^2}},$$

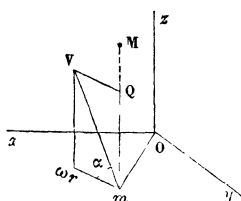
qui contient une erreur analogue à celle qui se trouve dans la formule de M. H. Resal pour  $\cos(\rho, z)$  (p. 241). En effet, M. Schell, dans l'expression que nous venons

de citer, représente par  $T$  la vitesse de glissement et par  $\alpha$  l'angle dont la tangente est égale à  $\frac{S_1}{S}$ , et dont le sinus, par conséquent, est égal à  $\frac{S_1}{\sqrt{S^2 + S_1^2}} = \frac{S_1}{\varphi_n}$ ; de sorte que, d'après M. Schell,  $\cos \mu = \frac{S_1}{\varphi_n} \frac{T}{\sqrt{\omega^2 r^2 + T^2}}$ , tandis que, réellement, d'après la troisième de nos formules (7),

$$\cos \mu = \frac{S_1}{\varphi_n} \frac{\omega r}{\sqrt{r^2 \omega^2 + 1^2}}.$$

*Note de M. Resal.* — L'erreur signalée par M. Sabinine dans l'expression générale de l'accélération normale d'un point d'un système invariable, que j'ai donnée autrefois dans le *Journal de l'École Polytechnique*, est tout à fait matérielle et peut se réparer immédiatement sans calcul.

Fig. 2.



Soient (fig. 2)

$m$  la projection du point  $M$  d'un système invariable,

$r$  la distance  $Om$ ,

$\omega$ ,  $Q$  la rotation instantanée et la vitesse de glissement,

$V$  la vitesse de  $M$  ou la résultante de  $Q$  et de  $\omega r$ ,

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$  les composantes de l'accélération de ce point parallèles aux axes,

$\alpha$  l'angle de  $V$  avec  $\omega r$ .

Suivant  $r$ , on a l'accélération

$$X \frac{x}{r} + Y \frac{y}{r}$$

qui est normale à  $V$ .

L'accélération  $Z$  donne

$$Z \cos a$$

perpendiculaire à  $V$  dans le plan de  $\omega r$  et de  $Q$ .

Mais, suivant  $\omega r$ , on a aussi l'accélération

$$Y \frac{x}{r} - X \frac{y}{r},$$

qui donne suivant  $Z \cos a$  la composante

$$\left( Y \frac{x}{r} - X \frac{y}{r} \right) \sin a,$$

et c'est précisément celle qui a été omise; de sorte que l'on a

$$Z \cos a - \left( Y \frac{x}{r} - X \frac{y}{r} \right) \sin a,$$

au lieu de  $Z \cos a$ .

Mais cette omission ne touche pas à la partie principale du Mémoire, qui avait surtout pour objet de déterminer la forme des fonctions  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .