

L. PAINVIN

**Rectification relative à la note insérée au
tome X (2e série), année 1871, p. 481**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11
(1872), p. 376-380

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__376_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECTIFICATION

relative à la Note insérée au tome X (2^e série), année 1871, p. 484;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Dans la première partie de la proposition énoncée à la page 481 du tome X (2^e série), année 1871, j'ai dit que la surface engendrée était de l'ordre $4m$; en réalité, elle n'est que de l'ordre $2m$. Les formules écrites à la

page 483 donnent λ et μ comme des fonctions du second degré en x, y, z ; et, s'il en était ainsi, il serait parfaitement exact de conclure que la surface engendrée est de l'ordre $4m$; mais, lorsqu'on fait le calcul d'une manière plus complète, on constate que les seconds membres se réduisent à des fonctions du premier degré, et la surface engendrée n'est plus alors que de l'ordre $2m$.

Je vais donc donner la résolution explicite des équations qui établissent la correspondance entre les points des deux surfaces.

2. Voici l'énoncé :

Soient donnés trois points fixes A, B, C et une surface fixe Σ du $m^{\text{ème}}$ ordre; on imagine un point M se déplaçant sur la surface Σ ; puis, avec trois autres points fixes A', B', C', donnés dans l'espace, on construit une pyramide A'B'C'S telle qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point M sur la surface Σ ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S décrira une surface (S) d'ordre $2m$ en général.

Nous prendrons pour plan des x, y le plan des trois points A, B, C; soient alors

$$\alpha, \beta, 0; \quad \alpha_1, \beta_1, 0; \quad \alpha_2, \beta_2, 0$$

les coordonnées respectives des points A, B, C; puis

$$a, b, c; \quad a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2$$

celles des points A', B', C'; désignons enfin par λ, μ, ν les coordonnées du point M, et par x, y, z celles du point correspondant S. D'après l'énoncé, les équations qui établissent la correspondance des deux points M et S

seront

$$(1) \quad \begin{cases} (\lambda - \alpha)^2 + (\mu - \beta)^2 + \nu^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2, \\ (\lambda - \alpha_1)^2 + (\mu - \beta_1)^2 + \nu^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2, \\ (\lambda - \alpha_2)^2 + (\mu - \beta_2)^2 + \nu^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2. \end{cases}$$

Il s'agit de résoudre les trois équations (1) par rapport à λ, μ, ν .

Dans ce but, nous poserons

$$(2) \quad \begin{cases} \rho = \alpha^2 + \beta^2, & R = a^2 + b^2 + c^2, \\ \rho_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2, & R_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, \\ \rho_2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2; & R_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2; \end{cases}$$

puis

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

où

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 1;$$

la signification géométrique des quantités $\rho, \dots, R, \dots, \Delta$ est visible.

Ceci admis, les équations (1) peuvent s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\alpha\lambda - 2\beta\mu \\ \quad = x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) + R - \rho, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\alpha_1\lambda - 2\beta_1\mu \\ \quad = x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_1x + b_1y + c_1z) + R_1 - \rho_1, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\alpha_2\lambda - 2\beta_2\mu \\ \quad = x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_2x + b_2y + c_2z) + R_2 - \rho_2. \end{cases}$$

Multiplions ces équations respectivement par $\frac{d\Delta}{d\alpha}, \frac{d\Delta}{d\alpha_1}, \frac{d\Delta}{d\alpha_2}$; puis par $\frac{d\Delta}{d\beta}, \frac{d\Delta}{d\beta_1}, \frac{d\Delta}{d\beta_2}$; enfin par $\frac{d\Delta}{d\gamma}, \frac{d\Delta}{d\gamma_1}, \frac{d\Delta}{d\gamma_2}$, et

ajoutons. On obtient alors les trois équations

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \left. \begin{aligned}
 \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ax + by + cz + \frac{\rho - R}{2} & \beta & 1 \\ a_1x + b_1y + c_1z + \frac{\rho_1 - R_1}{2} & \beta_1 & 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \frac{\rho_2 - R_2}{2} & \beta_2 & 1 \end{vmatrix}, \\
 \mu \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha & ax + by + cz + \frac{\rho - R}{2} & 1 \\ \alpha_1 & a_1x + b_1y + c_1z + \frac{\rho_1 - R_1}{2} & 1 \\ \alpha_2 & a_2x + b_2y + c_2z + \frac{\rho_2 - R_2}{2} & 1 \end{vmatrix}, \\
 [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & ax + by + cz + \frac{\rho - R}{2} \\ \alpha_1 & \beta_1 & a_1x + b_1y + c_1z + \frac{\rho_1 - R_1}{2} \\ \alpha_2 & \beta_2 & a_2x + b_2y + c_2z + \frac{\rho_2 - R_2}{2} \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Les équations (5) résolvent complètement la question; on voit que λ et μ sont des fonctions linéaires de x, y, z , et que ν^2 est une fonction du second degré en x, y, z ; par conséquent, si la surface directrice (Σ)

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

est de l'ordre m , la surface engendrée (S) sera de l'ordre $2m$.

Je n'entrerais, pour le moment, dans aucun détail sur

(380)

les conséquences multiples qu'on peut tirer de ce mode de transformation, qui comprend d'ailleurs, comme cas particulier, la transformation de Jacobi.