

JOACHIMSTHAL

Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11 (1872), p. 149-155

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__149_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE NOMBRE DE NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT
MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE**

(suite, voir même tome, p. 8),

PAR JOACHIMSTHAL.

V.

Soient α et β les carrés des demi-axes de la section diamétrale de l'ellipsoïde parallèle au plan tangent à cette surface au point (x_0, y_0, z_0) ; on a

$$(4^*) \quad \begin{cases} x_0^2 = \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}, \\ y_0^2 = \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)}, \\ z_0^2 = \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Les rayons de courbure principaux en ce point sont $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$; de plus, on a

$$\pi^2 \alpha \beta = abc.$$

En désignant par (X, Y, Z) un des centres de courbure, on a

$$\frac{X - x_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{Y - y_0}{\frac{y_0}{b}} = \frac{Z - z_0}{\frac{z_0}{c}} = -\alpha \quad \text{ou} \quad -\beta;$$

et, par suite,

$$(18) \quad \begin{cases} X^2 = \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)}, \\ Y^2 = \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)}, \\ Z^2 = \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)}, \end{cases}$$

formules où l'on doit poser soit $u = \alpha$ et $w = \beta$, soit $u = \beta$ et $w = \alpha$, suivant celui des centres de courbure que l'on considère.

Lorsque l'on fait varier u depuis a jusqu'à b , pendant que w varie depuis b jusqu'à c , le lieu du point (X, Y, Z) est une surface F_1 , qui est le lieu des centres de courbure principaux maximum; si, au contraire, on fait varier u de b à c et w de a à b , le lieu est une seconde surface F_2 , qui est le lieu des centres de courbure principaux minimum; F_1 et F_2 sont les deux nappes d'une même surface, lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde, dont l'équation s'obtiendrait en éliminant u et w entre les équations (18).

Toute droite menée par l'origine des coordonnées rencontre F_1 (et de même F_2) en deux points également distants de cette origine.

En effet, si l'on pose

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n},$$

l, m et n désignant des constantes, u et w sont déterminées par les équations suivantes

$$(19) \quad l^2 : m^2 : n^2 = \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)} : \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)} : \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)};$$

d'où l'on déduit

$$(20) \quad \frac{at^2}{(a-u)^2} + \frac{bm^2}{(b-u)^2} + \frac{cm^2}{(c-u)^2} = 0.$$

Un mode de discussion bien connu fait voir immédiatement que cette équation n'a que deux racines réelles, l'une comprise entre a et b , l'autre comprise entre b et c .

De l'équation (19) on déduit qu'à toute valeur réelle de u , comprise entre a et b , correspond une valeur réelle de v comprise entre b et c , et qu'à toute valeur réelle de u comprise entre b et c correspond une valeur réelle de v comprise entre a et b . Par suite, F_1 et F_2 sont des surfaces fermées.

Cherchons maintenant à déterminer les intersections de la normale à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) avec les surfaces F_1 et F_2 .

X, Y, Z désignant les coordonnées d'un des points d'intersection, outre les équations (18), on doit encore avoir les équations

$$\frac{X - x_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{Y - y_0}{\frac{y_0}{b}} = \frac{Z - z_0}{\frac{z_0}{c}} = -v.$$

Si nous tirons de là les valeurs de X, Y, Z pour les porter dans les équations (18), u, w et v seront déterminés par les relations

$$(21) \quad \begin{cases} (a-u)^2(a-w) = (a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta), \\ (b-u)^2(b-w) = (b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta), \\ (c-u)^2(c-w) = (c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta). \end{cases}$$

Pour $u = a$, la première de ces équations donne $v = a$, et les deux autres

$$\begin{aligned} -w &= a - \alpha - \beta + \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{b-a}, \\ -w &= a - \alpha - \beta + \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{c-a}, \end{aligned}$$

résultats qui impliquent une contradiction, puisque $(a - \alpha)$ et $(a - \beta)$ sont différents de zéro; le même fait a lieu lorsque l'on pose

$$u = b \quad \text{et} \quad u = c.$$

Des équations (21) on tire les relations suivantes

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-u)^2(a-b)(a-c)} + \frac{(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-u)^2(b-a)(b-c)} \\ & + \frac{(c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta)}{(b-u)^2(c-a)(c-b)} - 1 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-u)^3(a-b)(a-c)} + \frac{(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-u)^3(b-a)(b-c)} \\ & + \frac{(c-v)^3(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-u)^3(c-a)(c-b)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Réciproquement, de ces deux relations on peut déduire les équations (21); car $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$, étant différents de zéro, on peut toujours mettre trois grandeurs arbitraires γ , γ' et γ'' , sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \gamma &= \varepsilon + \varepsilon' a + \varepsilon'' a^2, \\ \gamma' &= \varepsilon + \varepsilon' b + \varepsilon'' b^2, \\ \gamma'' &= \varepsilon + \varepsilon' c + \varepsilon'' c^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire les relations (22) et (23) sous la forme suivante

$$\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)} + \frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)} + \frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)} = 1,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{a-u} + \frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)} \frac{1}{b-u} \\ + \frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)} \frac{1}{c-u} = 0. \end{aligned}$$

Si nous donnons à γ , γ' et γ'' les valeurs précédentes, on voit que ϵ'' est égal à 1, et que γ, γ' et γ'' doivent être respectivement égaux à $(a-u)(a-w)$, $(b-u)(b-w)$, $(c-u)(c-w)$.

Remarquons maintenant que z_1 étant une racine double de l'équation $f(z) = 0$, qui n'annule pas la fonction entière $F(z)$, on a à la fois

$$\frac{f(z)}{F(z)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \frac{f(z)}{F(z)} = 0;$$

d'après cela, on doit prendre pour ν les valeurs pour lesquelles l'équation (22) acquiert des racines égales, et pour u la valeur commune à ces racines, à l'exception, toutefois, des valeurs a , b et c .

L'équation (22) ne diffère pas de l'équation (5), que, d'après les considérations exposées aux §§ I et II, on peut écrire de la façon suivante

$$\frac{(u-\nu)^2(u-\alpha)(u-\beta)}{(u-a)(u-b)(u-c)} \times \left(\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta} - \frac{2}{u-\nu} \right) = 0,$$

ou encore

$$\frac{(u-\nu)}{(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2} \times [W(u-\nu) - 2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta)] = 0.$$

Pour que cette équation ait une racine double, il faut que l'on ait $u = \nu$ (alors on a $u = \alpha$ ou $u = \beta$, puisque l'on exclut les valeurs a , b et c), ou bien que le second facteur ait une racine double.

On a, dans ce cas,

$$\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta} - \frac{2}{u-\nu} = 0,$$

et

$$\frac{1}{(u-a)^2} + \frac{1}{(u-b)^2} + \frac{1}{(u-c)^2} - \frac{1}{(u-\alpha)^2} - \frac{1}{(u-\beta)^2} - \frac{2}{(u-\nu)^2} = 0;$$

on est ainsi ramené à la considération de l'équation (10) déjà traitée.

Les équations (22) et (23) ont les six solutions communes

$$\nu = \beta, \nu_1, \nu_2, \alpha, \nu_3, \nu_4,$$

$$u = \beta, u_1, u_2, \alpha, u_3, u_4.$$

A chaque couple de valeurs de u et ν correspond, d'après l'équation (21), une valeur réelle de w , qui est comprise entre a et b , si u est comprise entre b et c , et réciproquement.

La normale au point (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde rencontre la surface F_1 aux trois points désignés par (α) , (ν_3) et (ν_4) dans le § IV, et la surface F_2 aux trois points désignés par (β) , (ν_1) et (ν_2) .

La normale a , avec chacune de ces surfaces, un nombre impair de points communs, parce qu'elle les touche toutes les deux, à savoir : F en (α) et en F_2 (β) . Pour le voir analytiquement, on peut se reporter aux formules (18), on remarque immédiatement que le discriminant de (5) ou de

$$(u-\nu)[W(u-\nu)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta)]$$

contient évidemment les facteurs quadratiques $(\nu-\alpha)^2$ et $(\nu-\beta)^2$.

Mais comme cette circonstance importe peu dans la présente recherche, nous n'insisterons pas sur ce point.

Les résultats obtenus dans le § IV peuvent s'énoncer de la façon suivante :

Toute normale à l'ellipsoïde qui n'est pas dans le plan

d'une section principale rencontre chacune des nappes F_1 et F_2 de la surface lieu des centres de courbure, abstraction faite des centres de courbure principaux (α) et (β) relatifs à la normale considérée, en deux autres points (ν_3) et (ν_4) , et (ν_1) et (ν_2) . Chacune des cordes interceptées sur la normale par les nappes F_1 et F_2 contient un des points (α) et (β) ; de plus, ces deux cordes sont contiguës, c'est-à-dire qu'elles ont une partie commune, ou bien que l'une renferme l'autre.

D'un point donné, on peut mener à l'ellipsoïde un nombre de normales réelles égales à six, quatre ou deux, suivant que le point se trouve à l'intérieur des surfaces F_1 et F_2 , à l'intérieur de l'une et à l'extérieur de l'autre, ou enfin à l'extérieur de ces deux surfaces.

Remarque. — Pour compléter ces résultats, il faut encore considérer le cas où le point donné se trouve dans le plan d'une des sections principales.

Le plan des (xy) coupe les surfaces F_1 et F_2 suivant les courbes

$$(24) \quad (ax^2)^{\frac{1}{2}} + (by^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(25) \quad \frac{ax^2}{(a-c)^2} + \frac{by^2}{(b-c)^2} = 1.$$

Des pieds des normales passant par le point (ξ, η) , quatre sont situés dans le plan des (xy) , et leur réalité dépend de la position du point par rapport à la courbe (24). Les deux autres sont en dehors du plan des (xy) et leur réalité dépend de la position du point par rapport à la courbe (25).
