HOÜEL

# Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 9 (1870), p. 93-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__93_1>

# NOTE

## Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide;

PAR M. HOÜEL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans un Mémoire publié en 1868 dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, et dont une traduction française paraît en ce moment dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, M. Beltrami a exposé la Géométrie des surfaces de courbure constante négative, et est parvenu à cette conclusion importante, que cette Géométrie est identique avec ce que serait la Géométrie du plan, si l'on écartait le principe de la théorie des parallèles, connu sous le nom de *postulatum* d'Euclide.

Cette dernière Géométrie a été traitée simultanément par le professeur russe Lobatchefsky et par l'officier hongrois Jean Bolyai. Ces deux mathématiciens, en cherchant à développer une Géométrie hypothétique du plan, ont fondé, par le fait, la théorie des figures formées par les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante négative, ou surface *pseudosphérique,* suivant la dénomination proposée par M. Beltrami ; en sorte que leurs recherches s'appliquent à des objets parfaitement réels, indépendamment de l'hypothèse qu'ils avaient prise pour point de départ. Mais cette Géométrie est la seule que l'on ait le droit d'appliquer au plan tant que, pour une raison quelconque, on ne sera pas à même d'affirmer la vérité du principe des parallèles.

Lobatchefsky, par des considérations fondées sur les observations de la parallaxe annuelle des étoiles, a rigoureusement démontré que, dans tous les triangles que les hommes auront jamais à mesurer, la somme des angles ne pourra pas différer de deux angles droits d'une quantité appréciable. Si l'on ne veut pas se contenter de cette preuve expérimentale qui suffit pourtant, et au delà, dans toutes les applications de la Géométrie, et surpasse en précision toutes celles qui servent de base aux principes de la Mécanique, et dont on n'a jamais songé à contester la valeur ; il est naturel alors que l'on cherche à s'en assurer en partant des données précédemment admises, c'est-à-dire de l'existence de la ligne droite (*) et du plan.

(*) Les conditions qu'implique l'existence de la ligne droite ont été énumérées dans l'article de M. Bertrand, inséré dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, page 17 (3 janvier 1870). Il

Il faut donc prouver, si l'on peut, que l'hypothèse de la somme des angles d'un triangle rectiligne moindre que deux angles droits conduit nécessairement à une contradiction quand on en développe toutes les conséquences.

Mais, dans cette démonstration *par l'absurde*, il faut avoir soin de ne négliger aucune des conséquences de l'hypothèse que l'on veut combattre. Sans cela les contradictions que l'on rencontrera pourront toujours être attribuées au changement d'hypothèse que l'on aura introduit dans le courant du raisonnement. C'est l'oubli de cette règle élémentaire de logique qui a conduit tant de géomètres à proposer des démonstrations dans lesquelles un plus mûr examen fait apercevoir des pétitions de principe.

Sans vouloir préjuger la question de savoir si, comme Ampère l'indique en passant (*), on peut espérer trouver dans les constructions à trois dimensions le moyen d'arriver à la solution tant cherchée, on peut affirmer d'avance, une fois pour toutes, que jamais les méthodes fondées sur des constructions planes ne pourront conduire à ce but.

En effet, ces constructions, pour être concluantes, doivent être faites sans s'appuyer sur le principe que l'on veut établir, et, par suite, en admettant l'hypothèse contraire. Or, dans ce cas, comme l'ont établi Lobatchefsky

---

nous semble que l'auteur indique une condition de trop, en affirmant que la propriété de la ligne droite d'être la plus courte entre deux de ses points doit être admise sans démonstration. *Voy.* les *Éléments d Euclide*, livre I, proposition 20, et l'Ouvrage de M. DUHAMEL (*Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement*), tome II, pages 7, 312, 319, et le Chapitre VI, pages 411 à 417.

(*) *Essai sur la Philosophie des Sciences*, tome I, page 67. *Voy.* le savant Mémoire de M. Genocchi intitulé : *Dei primi Principii della Meccanica e della Geometria in relazione al Postulato d'Euclide*, page 35. Florence, 1869.

et Bolyai, la Géométrie du plan rentrera, comme cas particulier, dans celle des surfaces de courbure constante négative, et les constructions faites sur le plan ne pourront jamais conduire à des conclusions autres que celles qu'on en tirerait si elles étaient faites sur ces surfaces courbes.

Mais on sait que, sur une surface de courbure constante négative, la somme des angles de tout triangle géodésique est moindre que deux angles droits. Donc les constructions dont il s'agit, ne pouvant amener à une conclusion contraire sur la surface courbe, ne le pourront jamais non plus sur le plan.

Cette assertion se vérifie facilement par un examen attentif de la démonstration présentée récemment par M. Carton à l'Académie des Sciences de Paris. D'après un théorème connu, l'aire d'un polygone géodésique de $n$ côtés, sur une surface de courbure constante négative, est proportionnelle à la différence entre la somme de ses angles et $2n - 4$ angles droits. Il résulte de là que cette aire a une valeur constamment inférieure à un certain maximum. Si l'on veut fonder la démonstration du principe des parallèles sur la considération d'un hexagone, il faut que celui-ci soit constructible indépendamment du principe en question, c'est-à-dire en laissant provisoirement au plan toutes les propriétés des surfaces de courbure constante négative. Mais alors l'aire de cet hexagone ne pourra plus renfermer dans son intérieur un nombre illimité de triangles égaux entre eux et de grandeur finie. Il faudra donc, passé une certaine limite, que le périmètre de l'hexagone se coupe lui-même, auquel cas la démonstration ne sera plus possible.