

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 86-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__86_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 838

(voir 2^e série, t. VII, p. 528);

PAR M. DESIRÉ ANDRÉ.

Soit q_0 le quotient par $1.2.3 \dots p$ du produit de p nombres consécutifs, le premier étant $(a-1)p$; soit q_1 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-a$; q_2 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-2a$, et ainsi de suite; en s'arrêtant dès qu'on trouvera un nombre nul ou négatif, on aura la relation

$$a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \dots$$

J.-J.-A. MATHIEU.

1. Soient a et p deux nombres entiers positifs quelconques; nous avons identiquement, pour toute valeur de x ,

$$\begin{aligned} (x^a - 1)^p x^{-1} &= x^{ap-1} - \frac{p}{1} x^{a(p-1)-1} \\ &+ \frac{p(p-1)}{1.2} x^{a(p-2)-1} - \dots (-1)^p x^{-1}. \end{aligned}$$

Prenons les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des deux membres de cette identité, remplaçons x par 1, et divisons par $1.2.3 \dots p$; nous trouvons

$$a^p = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \dots + 1,$$

ou bien

$$(1) \quad a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \dots,$$

ce qui est la relation proposée.

2. Pour généraliser, considérons l'identité

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} (x^a - 1)^p x^{-k} &= x^{ap-k} - \frac{P}{1} x^{a(p-1)-k} \\ &+ \frac{P(P-1)}{1.2} x^{a(p-2)-k} - \dots (-1)^p x^{-k}. \end{aligned} \right.$$

Prenons les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des deux membres, remplaçons x par 1, divisons par 1.2.3... p , et convenons de désigner par C_m^n le quotient par 1.2.3... n du produit de n nombres entiers consécutifs décroissants à partir de m , nous trouvons

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} a^p &= C_{ap-k}^p - \frac{P}{1} C_{a(p-1)-k}^p \\ &+ \frac{P(P-1)}{1.2} C_{a(p-2)-k}^p - \dots (-1)^p C_{-k}^p, \end{aligned} \right.$$

identité qui se réduit à la proposée pour $k = 1$.

3. On pourrait généraliser davantage en prenant les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des deux membres de l'identité (2). Quel que soit l'entier n , la dérivée $n^{\text{ième}}$ du second membre est toujours très-facile à calculer. La dérivée $n^{\text{ième}}$ du premier membre, pour $x = 1$, est nulle si n est inférieur à p ; elle se réduit à 1.2.3... $p \cdot a^p$ si n égale p ; enfin, si n est supérieur à p , il suffit pour l'obtenir de savoir calculer les valeurs des dérivées de $(x^a - 1)^p$; or on voit facilement que, pour $x = 1$, la dérivée $(p+r)^{\text{ième}}$ de $(x^a - 1)^p$ est égale à 1.2.3... $(p+r)$, multiplié par le coefficient de y^r dans le développement de

$$\left[y^{a-1} + \frac{a}{1} y^{a-2} + \frac{a(a-1)}{1.2} y^{a-3} + \dots + \frac{a(a-1)}{1.2} y + \frac{a}{1} \right]^p.$$

4. Il est évident que, p étant un nombre entier positif, l'identité (3) subsiste pour toutes les valeurs réelles de a

et de k . Donnons aux lettres a et k des valeurs entières quelconques (positives, nulles ou négatives) : tous les termes de (3) seront des nombres entiers. Supposons de plus que p soit premier : au second membre, à l'exception des deux extrêmes, tous les termes auront leurs coefficients divisibles par p . Si donc nous remplaçons l'expression $(-1)^p C_{-k}^p$ par C_{k+p-1}^p , qui lui est évidemment égale, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

THÉOREME. — *Quels que soient les entiers a et k , si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C_{ap-k}^p + C_{k+p-1}^p - a^p$$

est divisible par p .

COROLLAIRE. — *Quel que soit l'entier a , si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C_{ap}^p - a^p$$

est divisible par p .

COROLLAIRE. — *Quels que soient les entiers k et m , si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C_{mp^2-k}^p + C_{k+p-1}^p$$

est divisible par p .

COROLLAIRE. — *Quel que soit l'entier m , si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C_{mp^2-1}^p + 1$$

est divisible par p .

Note. — Nous avons reçu deux autres bonnes solutions de la question 838 : l'une est de M. D. Thomas, de Margam ; l'autre de M. E. Pellet, élève de l'École Normale.

Question 951

(voir 2^e série, t. VIII, p. 336);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3} \tan \frac{x}{2^3} + \dots$$

(LAISANT.)

M. Serret, dans sa *Trigonométrie* (p. 258, 4^e édition), a démontré les deux formules suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 2^2 (2^2 - 1) B_1 \frac{x}{1 \cdot 2} + \dots \\ \quad \quad \quad + 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \cot x = \frac{1}{x} - 2^2 B_1 \frac{x}{1 \cdot 2} - \dots - 2^{2n} B_n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n} - \dots,$$

où

$$B_\mu = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2\mu}{2^{2\mu-1} \pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \frac{1}{4^{2\mu}} + \dots \right).$$

La seconde formule peut s'écrire

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = 2^2 B_1 \frac{x}{1 \cdot 2} + \dots + 2^{2n} B_n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots$$

En vertu de la première, le coefficient de $\frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n}$ dans la somme

$$\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3} \tan \frac{x}{2^3} + \dots$$

est

$$2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{6n}} + \dots \right) = 2^{2n} B_n,$$

car la somme entre parenthèses égale

$$\frac{\frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Les deux membres de l'égalité à démontrer s'expriment donc par deux séries identiques, ce qui démontre la formule.

Note. — M. Moret-Blanc nous a adressé des solutions des questions 931, 935, 943, peu différentes de celles qui ont déjà été publiées dans les *Nouvelles Annales* (t. VIII, p. 516, 520, 548).