NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9 (1870), p. 469-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__469_1>

NOTE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS DE L'ÉQUATION $x^m = y^n + 1$.

I. *Lorsque le nombre représenté par x est premier, l'équation proposée n'a pas d'autre solution entière et positive que la solution*

$$x = 3, \quad m = 2, \quad y = 2, \quad n = 3 \ (*).$$

C'est ce que nous allons démontrer.

(*) En n'admettant toutefois, pour les inconnues, que des valeurs entières supérieures à l'unité.

L'exposant n de y est nécessairement impair; autrement l'équation proposée se ramènerait à la forme $x^m = z^2 + 1$, et l'on sait que cette dernière équation n'admet aucune solution entière. (*Voir* la démonstration de M. Le Besgue, *Nouvelles Annales*, 1re série, t. IX, p. 178.)

De plus, il est évidemment permis de considérer l'exposant n comme un nombre premier; car, si n admet un diviseur premier α autre que n, en posant $y^{\frac{n}{\alpha}} = Y$ l'équation proposée se réduira à celle-ci : $x^m = Y^\alpha + 1$, où l'exposant de Y est premier.

Cela posé, l'équation $x^m = y^n + 1$ peut s'écrire

$$x^m = (y+1)(y^{n-1} - y^{n-2} + y^{n-3} - \ldots - y + 1),$$

et, comme la division de $y^{n-1} - y^{n-2} + y^{n-3} - \ldots - y + 1$ par $y + 1$ donne pour reste le nombre n, il vient, en nommant N le quotient de cette division,

$$x^m = (y+1)[N(y+1) + n]. \tag{1}$$

Chacun des deux facteurs $(y+1)$, $N(y+1)+n$ de x^m étant divisible par le nombre premier x, ce nombre est aussi diviseur de n; or n est premier, donc

$$x = n. \tag{2}$$

Plus généralement, tout facteur de x^m est une puissance entière de x; pour le facteur $y + 1$, l'exposant de cette puissance est l'unité. En effet, soit $y + 1 = x^\alpha$, il en résulte

$$x^m = x^\alpha(Nx^\alpha + n) = x^\alpha(Nx^\alpha + x) = x^{\alpha+1}(Nx^{\alpha-1} + 1),$$

et, si α surpassait l'unité, le facteur $Nx^{\alpha-1} + 1$ de x^m ne serait pas divisible par x; donc $\alpha = 1$, et

$$y + 1 = x = n. \tag{3}$$

En remplaçant x par $y+1$, l'équation proposée $x^m = y^n + 1$ devient

$$(y+1)^m = y^n + 1, \tag{4}$$

et l'on voit que l'exposant m doit être moindre que n. Mais $n = x = y+1$; on a par conséquent l'inégalité

$$m < y+1.$$

D'autre part, l'équation (4) donne

$$y^m + my^{m-1} + \ldots + my + 1 = y^n + 1,$$

d'où

$$y^{m-1} + my^{m-2} + \ldots + m = y^{n-1},$$

égalité qui montre que m est multiple de y; donc

$$m = y. \tag{5}$$

Si maintenant on substitue y et $y+1$ à m et n, dans l'équation (4), il en résultera d'abord

$$(y+1)^y = y^{y+1} + 1,$$

puis, divisant par y^y,

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = y + \frac{1}{y^y}.$$

Or, $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ ayant pour limite le nombre e, on a nécessairement

$$y + \frac{1}{y^y} < 3;$$

ainsi le nombre entier y est compris entre 1 et 3, par conséquent $y = 2$. Il s'ensuit $x = 3$, $m = 2$, $n = 3$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*La suite prochainement.*)