

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 41-46

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__41_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 957

(voir 2^e série, t. VIII, p. 479);

SOLUTION DE MM. A. BOTTIGLIA ET F. ISAIA,

Élèves de M. Genocchi, à Turin.

On décrit sur une droite AB, comme diamètre, une demi-circonférence AMB, et de l'autre côté de la droite AB un rectangle ABB'A' ayant pour base AB et pour hauteur une droite BB' égale au côté du carré inscrit dans le cercle dont AB est le diamètre; puis, d'un point M pris arbitrairement sur la demi-circonférence AMB on mène aux deux sommets A', B' du rectangle les droites MA', MB' qui coupent le diamètre AB en des points C, D. Démontrer que $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.
(FERMAT.)

Les deux triangles semblables AA'C, CMP (*) donnent

$$AC : CP = AA' : MP;$$

les deux triangles aussi semblables MPD, B'BD donnent

$$BD : PD = AA' : MP;$$

de là,

$$AC : CP = BD : PD,$$

(*) La droite MP est la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre AB.

(42)

ou mieux,

$$AC : AP - AC = (AB - AD) : (AD - AP),$$

et composant

$$AP : AC = (AB - AP) : (AB - AD),$$

d'où

$$AP = \frac{AB \cdot AC}{AB - (AD - AC)}.$$

Les deux triangles semblables A'MB', CMD donnent

$$(AD - AC) : AB = MP : MP + \frac{1}{2} AB \sqrt{2};$$

divisant,

$$AB - (AD - AC) : AD - AC = \frac{1}{2} AB \sqrt{2} : MP;$$

d'où

$$MP = \frac{(AD - AC) AB \sqrt{2}}{2[AB - (AD - AC)]}.$$

Or, on a

$$\overline{MP}^2 + \overline{AP}^2 = AB \cdot AP;$$

en substituant, dans cette dernière égalité, les valeurs de AP et PM, ci-dessus trouvées, on a

$$\begin{aligned} & 4 \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 + 2 \overline{AB}^2 \cdot \overline{AD}^2 + 2 \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 - 4 \overline{AB}^2 \cdot AC \cdot AD \\ &= 4 \overline{AB}^3 \cdot AC - 4 \overline{AB}^2 \cdot AC \cdot AD + 4 \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2; \end{aligned}$$

simplifiant,

$$\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = 2 AB \cdot AC$$

ou

$$\overline{AD}^2 + (AB - BC)^2 = 2 AB (AB - BC);$$

enfin, faisant les produits et simplifiant, on a

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

Nous avons aussi trouvé la solution par la Géométrie analytique; mais elle est trop simple, nous ne l'envoyons pas.

Note. — Le même théorème a été démontré par MM. J. Mouchel, conducteur des Ponts et Chaussées à Albert (Somme); Burtaire, Maître auxiliaire au lycée de Nancy; Chadu, Maître auxiliaire au lycée de Bordeaux; Laverlochère, élève de Mathématiques spéciales au collège Stanislas; Viaud, élève, à la Rochelle; Kruschwitz; H. Lez, à Lorrez-le-Bocage; F.-P. Pourcheiroux, à Paris; O. Callaudreau, à Angoulême; Berger et Chaurin, élèves de la classe de seconde au lycée du Mans.

(*) L'égalité à démontrer: $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ se réduit à $\overline{CD}^2 = 2.AC.BD$, en y remplaçant respectivement AD, BC, AB par AC + CD, BD + CD, AC + CD + BD. Or, si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite A'B' en un point P', la similitude des triangles MA'P', CAA' donnera

$$\frac{MP'}{AA'} = \frac{A'P'}{AC};$$

on aura de même

$$\frac{MP'}{AA'} = \frac{B'P'}{BD}.$$

De là

$$\frac{\overline{MP'}^2}{\overline{AA'}^4} = \frac{A'P'.B'P'}{AC.BD} = \frac{\overline{MP}^2}{AC.BD}.$$

Mais

$$\frac{M'P'}{MP} = \frac{A'B'}{CD};$$

donc

$$\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{AC.BD}, \quad \text{ou} \quad 2 = \frac{\overline{CD}^2}{AC.BD}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

(G.)

Sur la question 870(voir 2^e série, t VIII, p 463);

PAR M. TERRATS,

Professeur au collège d'Arras.

Dans le numéro d'octobre des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la question 870 se trouve résolue d'une manière fautive, ou plutôt l'auteur de l'article a substitué à la question proposée la question suivante : Trouver le lieu des centres de courbure des sections perpendiculaires à une même génératrice, sur une surface gauche. Après avoir substitué à la surface proposée l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée, il fait, en effet, une série de sections par des plans perpendiculaires à cette génératrice. Ces plans ne sont pas ceux des sections principales, parce que les tangentes aux sections principales en un point de l'hyperboloïde, sont les bissectrices des angles que font les deux génératrices qui passent en ce point. Je proposerai pour la question énoncée par M. Darboux la solution suivante :

Substituons encore à la surface gauche l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée. Mais prenons cette génératrice pour axe des X et non des Z , afin d'éviter l'indétermination qui se présenterait dans le calcul des coefficients différentiels p et q .

L'équation de cet hyperboloïde sera évidemment de la forme

$$(1) \quad A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C'y + 2C''z = 0.$$

Les équations de la normale au point $(x, 0, 0)$ sont

$$X = x, \quad \frac{Y}{B''x + C'} = \frac{Z}{B'x + C''}.$$

La surface lieu des normales le long de la génératrice est donc

$$\frac{Y}{B''X + C'} = \frac{Z}{B'X + C''},$$

ou

$$B'XY - B''XZ + C''Y - C'Z = 0,$$

équation d'un paraboloidé hyperbolique.

Il reste à trouver une seconde équation. Or, on sait que les Z des centres de courbures principaux en un point (x, y, z) d'une surface, sont donnés par l'équation

$$(rt - s^2)(Z - z)^2 - [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs](Z - z) + 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Il faut ici supposer $z = 0$, et calculer

$$p, q, r, s, t.$$

Pour cela, différencions l'équation (1) par rapport à x , puis par rapport à y . Nous trouverons

$$(2) \begin{cases} A''zp + Byp + B'z + B'xp + B''y + C''p = 0, \\ A'y + A''zq + Bz + Byq + B'xq + B''x + C' + C''q = 0. \end{cases}$$

Différencions maintenant les équations (2) par rapport à x et y . Nous trouverons de même

$$(3) \begin{cases} A''p^2 + A''zr + Byr + B'p + B'p + B'xr + C''r = 0, \\ A''pq + A''zs + Bp + Bys + B'q + B'xs + B'' + C''s = 0, \\ A' + A''q^2 + A''zt + Bq + Byt + Bq + B'xt + C''t = 0. \end{cases}$$

De ces équations on déduit pour le point $(x, 0, 0)$ les valeurs

$$p = 0, \quad q = -\frac{B''x + C'}{B'x + C''}, \\ r = 0, \quad s = -\frac{B'q + B''}{B'x + C''}, \quad t = -\frac{A''q^2 + Bq + A'}{B'x + C''},$$

qui doivent être substituées dans l'équation simplifiée

$$(4) \quad s^2Z^2 + tZ - (1 + q^2) = 0.$$

Il faudra ensuite éliminer x entre l'équation obtenue et l'équation $X = x$. Ce qui revient à remplacer dans (4), q, s, t par les valeurs

$$q = -\frac{B''X + C'}{B'X + C''}, \quad s = -\frac{B'q + B''}{B'X + C''}, \quad t = -\frac{Aq^2 + Bq + A'}{B'X + C''}.$$

Le résultat sera une équation du quatrième degré entre X et Z . Elle représente un cylindre parallèle à l'axe des Y .

L'intersection de ce cylindre avec le paraboloïde des normales sera la courbe demandée.
