

A. LAISANT

ÉTIENNE BEAUJEU

Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 354-360

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9_354_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES RÉSIDUS NUMÉRIQUES

(suite et fin, voir 2^e série, t. IX, p. 221, 271 et 302);

PAR MM. A. LAISANT ET ÉTIENNE BEAUJEU.

21. Si l'on suppose que le nombre des restes composant la période soit *pair* et égal à $2n$, on voit qu'en conservant les notations employées précédemment on aura

$$Aq^{2n} = m.D + A,$$

d'où

$$q^{2n} - 1 = m.D.$$

Par conséquent, si D est premier, $q^n - 1 = m.D$, ou $q^n + 1 = m.D$. Mais cette dernière égalité peut seule exister, car de la première résulterait que la période ne serait que de n termes. Donc aussi

$$\begin{aligned} q^{n+p} + q^p &= m.D, \\ Aq^{n+p} + Aq^p &= m.D, \end{aligned}$$

et

$$r_{n+p} + r_p = m.D.$$

Or r_{n+p} et r_p étant plus petits que D , on ne peut avoir que

$$r_{n+p} + r_p = D.$$

Ainsi, la somme des restes de même rang dans chaque demi-période est égale au diviseur, lorsque ce diviseur est un nombre premier.

22. Dans cette même hypothèse d'un nombre pair $2n$ de termes à la période, on aura encore les propriétés suivantes :

1° *La somme des restes affectés d'indices impairs est un multiple du diviseur, et, par suite, il en est de même de la somme des restes d'indices pairs.*

En effet, $r_1 + r_3 + \dots + r_{2n-1}$ peut être remplacé, à un multiple près de D, par

$$Aq + Aq^3 + \dots + Aq^{2n-1} = Aq \left(\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} \right);$$

donc, etc.

2° *Les termes de la suite $q, q^2, \dots$, divisés par D, nombre premier, donnant lieu aux restes $r_1, r_2, r_3, \dots$, et $2n$ étant le nombre des termes de la période, on aura $r_k^n = m.D \pm 1$, suivant que k est pair ou impair.*

Car (12) $r_k^n = r_n^k$, à un multiple près de D, et $r_n = D - 1$; donc, etc.

3° *n étant impair, on aura $r_p^k \pm r_{n+k}^{n+p} = m.D$, suivant que k et p sont de même parité ou de parités contraires.*

En effet (12), on a, à des multiples de D près,

$$r_{n+k} = r_n \times r_k,$$

d'où

$$\begin{aligned} r_{n+k}^{n+p} &= r_n^{n+p} \times r_k^{n+p} \\ &= r_n^n \times r_n^p \times r_k^n \times r_k^p \\ &= r_n^n \times r_n^p \times r_n^k \times r_k^p \\ &= r_n^{n+p+k} \times r_k^p; \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} r_k^p + r_{k+n}^{p+n} &= r_k^p (1 + r_n^{n+p+k}), \\ r_k^p - r_{k+n}^{p+n} &= r_k^p (1 - r_n^{n+p+k}); \end{aligned}$$

donc, etc.

4° *n étant pair, on aura $r_k^p \pm r_{n+k}^{n+p} = m.D$, suivant que k et p sont de parités contraires ou de même parité.*

On le verrait d'une façon analogue.

5° *n* étant impair, si l'on écrit $2n$ restes consécutifs quelconques, le premier étant d'indice impair, qu'on élève celui-ci à la puissance 1, le second à la puissance 2, et ainsi de suite, la somme sera un multiple du diviseur.

6° Si *n* est pair, la même propriété aura lieu, mais en commençant par un reste d'indice pair.

Ces deux dernières remarques sont des corollaires immédiats des deux précédents.

7° La somme ou la différence des puissances paires de deux restes distants de *n* rang est un multiple du diviseur, selon que l'exposant de la puissance est impair ou pair.

Cela résulte immédiatement de ce que $r_{n+k} = D - r_k$.

8° Soit *n* pair et égal à $2n'$; si l'on fait les deux produits $r_k \times r_{k+1}$ et $r_{k+n'} \times r_{k+n'+1}$, leur somme sera un multiple du diviseur.

Car ces deux produits peuvent être remplacés par q^{2k+1} et $q^{2k+2n'+1}$, dont la somme est

$$q^{2k+1} (q^n + 1) = m \cdot D.$$

9° Si l'on écrit les $2n$ restes sur deux lignes horizontales

$$\begin{array}{ccccccc} r_1, & r_2, & \dots, & r_n, \\ r_{n+1}, & r_{n+2}, & \dots, & r_{2n}, \end{array}$$

la somme des produits indiqués est un multiple du diviseur.

En effet,

$$r_{n+k} = D - r_k;$$

donc

$$r_{n+k} \times r_k = m \cdot D - r_k^2;$$

d'où résulte que, pour la somme, on aura

$$m \cdot D - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2).$$

En remplaçant r_1 par q , r_2 par q^2 , $\dots$, tout se réduit à examiner l'expression

$$q^2 + q^4 + \dots + q^{2n},$$

ou la suivante

$$1 + q^2 + \dots + q^{2n-2} = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = m.D.$$

Donc, etc.

10° n étant pair et égal à $2n'$, écrivons comme ci-dessous les $4n$ restes :

$$(A) \quad \begin{cases} r_1 & r_2, \dots, & r_{n'} \\ r_{n'+1}, & r_{n'+2}, \dots, & r_{2n'} \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} r_{2n'+1}, & r_{2n'+2}, \dots, & r_{3n'} \\ r_{3n'+1}, & r_{3n'+2}, \dots, & r_{4n'}. \end{cases}$$

Si l'on fait les produits indiqués en (A) et (B) et leurs sommes respectives P et L, on aura

$$P - L = m.D;$$

car $r_k \times r_{n'+k}$ et $r_{2n'+k} \times r_{3n'+k}$ peuvent être remplacés respectivement par $q^{2k+n'}$ et par $q^{2k+3n'}$ ou par $r_{2k+n'}$ et $r_{2k+3n'}$, et, de plus, $r_{2k+n'} = r_{2k+3n'}$; donc, etc.

11° Soit toujours $n = 4n'$, et posons

$$\begin{aligned} r_1 + \dots + r_{n'} &= S_1, \\ r_{n'+1} + \dots + r_{2n'} &= S_2, \\ r_{2n'+1} + \dots + r_{3n'} &= S_3, \\ r_{3n'+1} + \dots + r_{4n'} &= S_4; \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} S_1 S_3 + S_2 S_4 &= m.D, \\ S_1 S_4 - S_2 S_3 &= m.D, \\ S_1 S_2 - S_3 S_4 &= m.D. \end{aligned}$$

On le voit sans peine en remplaçant S_1, S_2, S_3, S_4 par

$$q \left(\frac{q^{n'} - 1}{q - 1} \right), q^{n'+1} \left(\frac{q^{n'} - 1}{q - 1} \right), q^{2n'+1} \left(\frac{q^{n'} - 1}{q - 1} \right), q^{3n'+1} \left(\frac{q^{n'} - 1}{q - 1} \right)$$

respectivement.

12° Supposons toujours $n = 4n'$, posons

$$r_1 + r_3 + \dots + r_{2n'-1} = \Sigma_1,$$

$$r_2 + r_4 + \dots + r_{2n'} = \Sigma_2,$$

$$r_{2n'+1} + r_{2n'+3} + \dots + r_{4n'-1} = \Sigma_3,$$

$$r_{2n'+2} + r_{2n'+4} + \dots + r_{4n'} = \Sigma_4;$$

on aura

$$\Sigma_1 \Sigma_2 - \Sigma_3 \Sigma_4 = m \cdot D,$$

$$\Sigma_1 \Sigma_4 - \Sigma_2 \Sigma_3 = m \cdot D.$$

On s'en assurerait comme précédemment.

Nota. On verrait aisément que plusieurs des propriétés de ce numéro s'étendent aux restes dus à la progression géométrique $Aq, Aq^2, \dots$, où A est différent de 1.

23. Pour terminer, nous proposerons au lecteur, à titre d'exercices, les questions suivantes :

1° En divisant les nombres $q, q^2, \dots$ par un diviseur D qui s'écrive ab dans le système de numération de base q , démontrer que

$$a^2 r_2 - b^2 r_0 = m \cdot D,$$

$$a^3 r_3 - b^3 r_0 = m \cdot D,$$

$$a^4 r_4 - b^4 r_0 = m \cdot D,$$

$$\dots \dots \dots,$$

et ainsi de suite, r_0 étant un reste quelconque.

2° D , nombre premier, s'écrivant encore ab dans le système de base q , donne lieu, appliqué comme diviseur à la suite $Aq, Aq^2, \dots$, à une période de $2n$ restes

$r_1, r_2, \dots, r_{2n}$. Démontrer que

$$ar_k - br_{k+n-1} = m.D$$

et

$$ar_{k+n+1} - br_k = m.D.$$

3° En divisant $q, q^2, \dots$ par le nombre premier, $D = \frac{q+B}{N}$, qui s'écrit ab dans le système B, on trouve une période de $2n$ restes $r_1, \dots, r_{2n}$. Démontrer que

$$ar_k + br_{k+n-1} = D$$

et

$$ar_{k+n+1} + br_k = m.D.$$

Si, au contraire, $D = \frac{q-B}{N}$, on aura

$$ar_k - br_{k+n-1} = D$$

et

$$ar_{k+n+1} - br_k = m.D.$$

4° Soit $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ ($r_n = 1$) la période obtenue en divisant $q, q^2, \dots$ par D; faire voir que si l'on prend $Q = m.D + r_{n-1}$, on trouvera, en partant de Q, $Q^2, \dots$ la période précédente renversée, au dernier terme près qui reste le même $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1$ ($r_n = 1$).

5° Soit $r_1, r_2, \dots, r_n$ une suite quelconque de n restes consécutifs provenant de la division de $q, q^2, q^3, \dots$ par un même diviseur, la période étant de n termes. Écrivons au-dessous une permutation circulaire quelconque de ces restes

$$\begin{array}{ccccccc} r_1, & r_2, & \dots, & r_n, \\ r_p, & r_{p+1}, & \dots, & r_{p-1}. \end{array}$$

Si l'on fait les produits indiqués, leur somme sera multiple de D, à la condition qu'on ait $n > 2$.

6° $q, q^2, \dots$, divisés par D, donnant lieu à une période de n termes, formons un multiple de D qui ait

n chiffres dans le système de numération de base q . Soit $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$ ce multiple. On sait qu'en écrivant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sous n restes consécutifs quelconques, la somme des produits sera égale à un multiple du diviseur. Démontrer qu'il en est de même aussi en écrivant $\alpha_1 \pm r_1, \alpha_2 \pm r_2, \dots, \alpha_n \pm r_n$, ou bien $\alpha_1 \pm k, \dots, \alpha_n \pm k$, au lieu des chiffres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($r_1, \dots, r_n$ sont n restes consécutifs quelconques, k est un entier quelconque).
