

PAINVIN

Note sur la construction géométrique des normales à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 348-353

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9_348_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES NORMALES
A UNE CONIQUE;**

PAR M. PAINVIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

1. THÉORÈME I. — *Si d'un sommet A_1 d'une conique Σ on abaisse des perpendiculaires sur les quatre normales menées à la courbe d'un même point P , les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 , où ces perpendiculaires rencontrent la courbe, sont sur une même circonférence Ω .*

THÉORÈME II. — *Si du sommet A_1 on abaisse, sur le diamètre passant par P , une perpendiculaire qui rencontre la conique en s , la tangente en s sera l'axe radical du cercle précédent et du cercle décrit sur l'axe qui passe par A_1 .*

THÉORÈME III. — *Par le sommet A_1 on mène une parallèle à la polaire du point P relative à Σ ; soit p l'intersection de cette parallèle avec Σ ; soit π le centre du cercle passant par p et par les points ω, ω' , où la tangente en s rencontre le cercle décrit sur l'axe qui passe par A_1 ; soit ρ l'intersection du diamètre passant par P avec la polaire du point P . Le centre du cercle Ω sera sur la droite menée par le point P parallèlement à $\pi\rho$.*

Les deux premiers théorèmes sont dus à Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 172; t. XLVIII, p. 337); le troisième théorème est extrait du remarquable Mémoire de M. Smith sur quelques problèmes cubiques et quadratiques (*Annali di Matematica*, 2^e série, t. III, p. 145).

Ces trois propositions donnent évidemment la solution

l'équation de cette normale sera

$$\frac{ax}{\cos \varphi} - \frac{by}{\sin \varphi} - c^2 = 0,$$

et l'on aura la condition

$$(2) \quad \frac{a\alpha}{\cos \varphi} - \frac{b\beta}{\sin \varphi} - c^2 = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire menée du point A_1 à cette normale sera

$$(3) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \tan \varphi - 1 = 0;$$

si l'on élimine $\tan \varphi$ entre les équations (2) et (3), on trouve

$$\left[a\alpha \left(1 - \frac{x}{a} \right) - b\beta \frac{y}{b} \right] \sqrt{\left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{y^2}{b^2}} = c^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{y}{b},$$

ou, en élevant au carré,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[a^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 - 2ab\alpha\beta \left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{y}{b} + b^2 \beta^2 \frac{y^2}{b^2} \right] \\ & \quad \times \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{y^2}{b^2} \right] \\ & = c^4 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \frac{y^2}{b^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière équation représente les quatre droites menées du point A_1 perpendiculairement aux quatre normales issues du point P ; les équations (1) et (4), considérées simultanément, détermineront les intersections de ces quatre droites avec la conique Σ .

Or remplaçons $\frac{y^2}{b^2}$ par $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$, et supprimons le fac-

teur $\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2$, on aura l'équation suivante :

$$\left[a^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) - 2ab\alpha\beta \frac{y}{b} + b^2 \beta^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right) \right] \\ \times \left(1 + \frac{x}{a} + 1 - \frac{x}{a}\right) = c^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

laquelle représente une courbe passant par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 ; cette équation est, en définitive,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} c^4 \frac{x^2}{a^2} - 2(a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2) \frac{x}{a} - 4ab\alpha\beta \frac{y}{b} \\ + 2(a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2) - c^4 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation des coniques passant par les quatre points communs aux courbes (1) et (5) étant

$$\left(\frac{c^4}{a^2} + \frac{\lambda}{a^2}\right) x^2 + \lambda \frac{y^2}{b^2} - 2(a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2) \frac{x}{a} - 4ab\alpha\beta \frac{y}{b} \\ + 2(a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2) - c^4 - \lambda = 0,$$

on aura un cercle si l'on prend $\lambda = b^2 c^4$.

Le premier théorème est donc démontré, et l'équation du cercle Ω est

$$(I) \quad (\Omega) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 \frac{a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2}{c^2} \frac{x}{a} - 4 \frac{ab\alpha\beta}{c^2} \frac{y}{b} \\ + 2 \frac{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2}{c^2} - a^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

les coordonnées de son centre sont

$$(II) \quad (C) \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2}{c^2 a}, \\ y_0 &= \frac{2a\alpha\beta}{c^2}; \end{aligned} \right.$$

et enfin l'axe radical du cercle Ω et du cercle décrit sur

$A_1 A_2$ est visiblement

$$(III) \quad (\omega\omega') \quad (a^2\alpha^2 - b^2\beta^2) \frac{x}{a} + 2ab\alpha\beta \frac{y}{b} - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) = 0.$$

3. Les coordonnées des points s , ρ et p définis dans l'énoncé sont

$$(6) \quad (s) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}, \\ y_1 = \frac{2ab^2\alpha\beta}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}; \end{cases}$$

$$(7) \quad (\rho) \quad \begin{cases} x_2 = \frac{a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \\ y_2 = \frac{a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}; \end{cases}$$

$$(8) \quad (p) \quad \begin{cases} x_3 = a \frac{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \\ y_3 = \frac{2ab^2\alpha\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}. \end{cases}$$

Le calcul de ces coordonnées est très-simple et ne présente aucune difficulté. On voit immédiatement que la tangente à la conique Σ au point $s(x_1, y_1)$ est l'axe radical (III); la seconde proposition est donc démontrée.

4. L'équation d'un cercle passant par les points ω , ω' est

$$(9) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \\ + \mu \left[(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2) \frac{x}{a} + 2ab\alpha\beta \frac{y}{b} - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) \right] = 0; \end{cases}$$

si l'on exprime que ce cercle passe par le point $p(x_3, y_3)$, on trouve

$$\mu = - \frac{2a^2b^2}{a^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)};$$

les coordonnées x', y' du centre du cercle $\omega\omega'p$ seront alors

$$(10) \quad (\pi) \quad x' = \frac{ab^2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)}{c^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}, \quad y' = \frac{2a^3b^2\alpha\beta}{c^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

5. Il est maintenant facile d'écrire les équations des deux droites qui, d'après l'énoncé, doivent déterminer le centre du cercle Ω . La droite menée perpendiculairement à $\omega\omega'$, et en son milieu, doit passer par le centre du cercle décrit sur A_1A_2 et par le centre π du cercle $\omega\omega'p$; son équation est donc

$$(11) \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

la droite menée par le point P parallèlement à $p\pi$ est

$$(12) \quad \frac{x - \alpha}{x_2 - x'} = \frac{y - \beta}{y_2 - y'}.$$

Or des valeurs (II), (7) et (10), il résulte évidemment

$$(13) \quad \frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0} = k, \quad \frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_2}{\beta} = k, \quad \text{où} \quad k = \frac{a^2b^2}{a'\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Eu égard à ces dernières relations, les équations (11) et (12) deviennent

$$(14) \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x - \alpha}{x_0 - \alpha} = \frac{y - \beta}{y_0 - \beta};$$

il est bien visible que ces deux droites se coupent au point (x_0, y_0) , centre du cercle Ω ; ce qui démontre le troisième théorème.