

ÉDOUARD LUCAS

Note sur les coefficients du binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 308-311

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__308_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES COEFFICIENTS DU BINÔME DE NEWTON;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS (*),

Agrégé des Sciences mathématiques.

On sait que, pour une puissance quelconque du binôme, la somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair; la même propriété a lieu, avec certaines restrictions, en prenant les coefficients de trois en trois. On considérera les six cas suivants, selon que le reste de la division de l'exposant par 6 sera 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 :

Premier cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égale à $6n$.

Remarquons d'abord que si l'on désigne par α et α^2 les racines cubiques de l'unité, on aura

$$(1 + \alpha)^3 = 2 + 3\alpha + 3\alpha^2 = (1 + \alpha^2)^3,$$

et, par suite,

$$(1 + \alpha)^{3p} = (1 + \alpha^2)^{3p}.$$

Le nombre des coefficients de la puissance $6n$ du binôme est égal à $6n + 1$. Appelons :

A	la somme des coefficients de rang.	1, 4, 7, ..., $(6n+1)$;
B	"	2, 5, 8, ..., $(6n-1)$;
C	"	3, 6, 9, ..., $6n$;

nous aurons alors

$$(1 + \alpha)^{6n} = A + B\alpha + C\alpha^2$$

(*) La question a été déjà traitée d'une manière générale par M. Catalan, t XX, p. 260.

(Note de la rédaction)

et

$$(1 + \alpha^2)^{6n} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, par suite, en retranchant membre à membre, nous déduisons $B = C$.

D'autre part, $(1 + \alpha)^{6n} - 1$ est divisible par $(1 + \alpha)^3 + 1$, ou par $3(1 + \alpha + \alpha^2)$: donc $A - 1 + B(\alpha + \alpha^2)$ est divisible par $1 + (\alpha + \alpha^2)$, et, par suite, $A - 1 = B$. Donc :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales entre elles en retranchant l'unité de la première, et leur valeur est $\frac{1}{3}(2^{6n} - 1)$.

Deuxième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égal à $6n + 3$.

On aura, comme précédemment,

$$(1 + \alpha)^{6n+3} = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et aussi $B = C$; et comme $(1 + \alpha)^{6n+3} + 1$ est divisible par $(1 + \alpha)^3 + 1$; on en déduira $A + 1 = B$. Donc :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 3$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la première, et leur valeur est $\frac{1}{3}(2^{6n+3} + 1)$.

Troisième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égale à $6n + 1$.

Nous avons en tout $6n + 2$ coefficients, et le groupe C en contient n , les groupes A et B en contiennent $n + 1$; alors

$$(1 + \alpha)^{6n+1} = A + B\alpha + C\alpha^2.$$

On peut faire voir que les groupes A et B contiennent les mêmes coefficients dans un ordre inverse; mais on peut aussi démontrer l'égalité de A et B de la façon sui-

vante. On a

$$(1 + \alpha)^{6n+1} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, en désignant $(1 + \alpha)^{6n} = (1 + \alpha^2)^{6n}$ par M,

$$M(1 + \alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

$$M(1 + \alpha^2) = A + C\alpha + B\alpha^2;$$

et en éliminant M entre ces équations, on déduit

$$(1 + \alpha^2)(A + B\alpha + C\alpha^2) - (1 + \alpha)(A + C\alpha + B\alpha^2) = 0,$$

ou bien

$$(B - A)(\alpha - \alpha^2) = 0,$$

et, par suite,

$$A = B.$$

D'autre part, on a

$$(1 + \alpha)^{6p+1} + \alpha^2 = A + B\alpha + (C\alpha + 1)\alpha^2;$$

mais le reste de la division de $(1 + \alpha)^{6p}(1 + \alpha) + \alpha^2$ par $(1 + \alpha)^3 + 1$ est égal au reste de la division de $1 + \alpha + \alpha^2$ par $(1 + \alpha)^3 + 1$; donc $A + B\alpha + (C + 1)\alpha^2$ est divisible par $1 + \alpha + \alpha^2$, et l'on a

$$A = B = C + 1.$$

On a donc ce théorème :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 1$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la dernière, et égales au tiers de $2^{6n+1} + 1$.

Quatrième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égal à $6n + 4$.

On a alors le théorème suivant, analogue au précédent :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 4$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la dernière, et égales au tiers de $2^{6n+4} - 1$.

Cinquième cas. — L'exposant du binôme est égal à $6n + 2$.

Il y a alors $6n + 3$ coefficients et $n + 1$ par groupes, en tenant compte du dernier qui est l'unité; on démontrerait, comme ci-dessus, le théorème suivant :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 2$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la seconde, et égales au tiers de $2^{6n+2} - 1$.

Sixième cas. — L'exposant du binôme est égal à $6n + 5$.

On a alors le théorème suivant :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 5$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la seconde, et égales au tiers de $2^{6n+5} + 1$.

Remarque. — On aurait d'ailleurs, et par le même procédé, des théorèmes analogues pour les sommes des coefficients pris de quatre en quatre, de cinq en cinq, etc.
