Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 97-113
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__97_0>

EXPOSÉ DES PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(suite, voir 2e série, t. VII, p. 403);

PAR UN ABONNÉ.

De la résolution des équations du premier degré.

Soient n équations du premier degré à n inconnues

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = l_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = l_n. \end{array}\right.$$

La théorie des déterminants permet de résoudre ces équations de la manière la plus simple.

Considérons le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons développer ce déterminant suivant les éléments d'une colonne quelconque. Désignons par $A_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans le développement de A. Ce coefficient, comme nous l'avons fait remarquer, ne contient aucun des éléments de la ligne i ou de la colonne k, et il est, *au signe près*, le déterminant obtenu en supprimant la ligne et la colonne de l'élément $a_{i,k}$. On aura

$$(2) \qquad A = A_{1,k}\, a_{1,k} + A_{2,k}\, a_{2,k} + A_{3,k}\, a_{3,k} + \ldots + A_{n,k}\, a_{n,k}.$$

D'autre part, si nous remplaçons les éléments $a_{1,k}, \ldots,$ de la $k^{ième}$ colonne par les éléments correspondants de la $i^{ième}$ colonne, deux colonnes deviendront identiques dans notre déterminant, et le résultat sera identiquement nul.

On aura donc

$$(3) \qquad A_{1,k}\, a_{1,i} + A_{2,k}\, a_{2,k} + \ldots + A_{n,k}\, a_{n,i} = 0.$$

i étant différent de k.

Cela posé, multiplions nos équations (1) respectivement par $A_{1,k}$, $A_{2,k}$, $A_{3,k}, \ldots,$ $A_{n,k}$. Le coefficient de x_i sera justement le premier membre de l'équation (3), il sera donc identiquement nul. Il ne restera dans le premier membre que le terme en x_k, qui, d'après l'équation (2), sera Ax_k. On aura donc

$$Ax_k = A_{1,k}\, l_1 + A_{2,k}\, l_2 + \ldots + A_{n,k}\, l_n.$$

Le second membre de cette formule est le déterminant A, dans lequel on a remplacé les éléments de la $k^{ième}$ colonne par les termes constants l_1, l_2, l_n. On peut donc écrire cette formule

$$Ax_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,k-1} & l_1 & a_{1,k+1} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,k-1} & l_2 & a_{2,k+1} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,k-1} & l_n & a_{n,k+1} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et l'on en déduit cette règle pratique qui servira de guide dans tous les cas.

Le dénominateur commun des valeurs des inconnues est le déterminant formé avec les coefficients de *ces inconnues. Pour avoir le numérateur de l'une des inconnues, il faut remplacer les coefficients de cette inconnue dans le dénominateur par les termes constants placés dans le second membre des équations.*

De l'élimination des inconnues entre $(n+1)$ équations à n inconnues du premier degré.

Pour traiter ce sujet, qui a une grande importance, nous prendrons un exemple simple. Soient les trois équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} ax + by + c &= 0,\\ a'x + b'y + c' &= 0,\\ a''x + b''y + c'' &= 0.\end{aligned}\right.$$

Il est clair que ces trois équations ne seront pas en général vérifiées par un système de valeurs de x et de y; car les valeurs qui satisferaient aux deux premières, et qui sont déterminées, ne satisferont pas en général à la troisième. Pour avoir l'équation de condition, il faudrait tirer des deux premières équations les valeurs de x et de y et les porter dans la troisième. Mais nous allons faire le calcul d'une manière plus symétrique, au moyen d'un artifice qui est dans beaucoup de questions d'une grande utilité. Posons

$$(4\ bis)\qquad x = \frac{x'}{z'},\quad y = \frac{y'}{z'},$$

et portons ces expressions de x et de y dans les équations (4); après avoir chassé les dénominateurs, nous obtiendrons les équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0,\\ a'x' + b'y' + c'z' &= 0,\\ a''x' + b''y' + c''z' &= 0,\end{aligned}\right.$$

qui contiennent trois inconnues au lieu de deux; mais il est évident, d'après la manière dont on les a obtenues, qu'en les divisant par z' elles ne contiendront plus que les deux rapports $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, et en général elles ne pourront être vérifiées que par les valeurs

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, elles doivent pouvoir être vérifiées par une infinité de valeurs finies, différentes de o de x', y', z', puisque, lorsqu'on aura x, y, x', y', z', seront définies par les équations (4 *bis*), qui ne déterminent que les rapports des trois quantités x', y', z'. Il faut donc que les équations (5) soient vérifiées par des valeurs finies de x', y', z'. Or les formules générales de résolution donnent

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} z' = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme z' n'est jamais nul, on conclut pour la condition déterminée

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, en général, le résultat de l'élimination de n inconnues entre $n+1$ équations du premier degré s'obtient en égalant à o le déterminant formé par les $(n+1)^2$ coefficients de ces équations.

Nous bornerons là ce que nous avions à dire sur la théorie.

APPLICATIONS.

1. *Développement des déterminants*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Considérons le premier de ces déterminants, nous trouvons

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= bc(c-b) + ac(a-c) + ab(b-a).$$

La forme même du déterminant nous indique que si $a = b$, le déterminant est nul, car deux lignes deviennent identiques. Donc le déterminant est divisible par $a - b$ et de même par $a - c$, $b - c$. Comme le déterminant est du troisième degré, on voit qu'il est égal au produit

$$(a-b)(a-c)(b-c)$$

multiplié par un facteur numérique; ce facteur numérique est l'unité, puisque bc^2 a dans le produit le coefficient 1 comme dans le déterminant. On aurait de même

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c),$$

. . . .

2. *Développement du déterminant*

$$\begin{vmatrix} a & c' & b' \\ c' & b & a' \\ b' & a' & c \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est très-remarquable et se rencontre très-souvent dans les applications. On voit que les éléments placés symétriquement par rapport à la diagonale abc sont égaux. On dit que le déterminant est *symétrique*. Son développement est

$$abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

c'est-à-dire *le produit des termes en diagonale augmenté du double produit des termes non en diagonale et diminué du produit de chaque terme en diagonale par le carré du terme non en diagonale qui ne se trouve ni dans sa ligne ni dans sa colonne.*

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = 8ACF + 2BDE - 2AE^2 - 2CD^2 - 2FB^2.$$

3. *Surface du triangle en fonction des coordonnées de ses sommets.*

Voici la règle qui est très-simple. La surface du triangle est

$$\frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix},$$

pourvu que, lorsqu'on va du point xy au point $x'y'$, puis au point $x''y''$, le mouvement de rotation autour du triangle soit dans le sens de l'axe des x vers l'axe des y. θ désigne l'angle des axes. Si le mouvement de rotation était inverse, on aurait la surface changée de signe.

Cette considération du signe est importante; elle permet par exemple d'établir en toute rigueur la surface du polygone.

4. *Équation du cercle passant par trois points.*

Cette équation est

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x'^2+y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2+y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2+y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, c'est l'équation d'un cercle, comme on peut le voir en ordonnant le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne. Elle prend la forme

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} + Lx + My + N = 0.$$

On voit que ce cercle se réduit à une ligne droite quand le coefficient de x^2+y^2 est nul, ce qui a lieu lorsque les trois points $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ sont en ligne droite. En effet, le coefficient de x^2+y^2 est, au signe près, la surface du triangle formé par les trois points donnés; il est donc nul quand les trois points sont en ligne droite.

Ordonnons le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne. Nous trouvons

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - (x'^2+y'^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (x''^2+y''^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - (x'''^2+y'''^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les déterminants qui entrent dans cette formule sont, au signe près, les surfaces des quatre triangles formés par les trois points donnés et par le point D (xy). Les termes x^2+y^2, $x'^2+y'^2$, représentent les carrés des distances à l'origine des coordonnées O, qui est un point quelconque du plan. En tenant compte de la règle que nous avons donnée pour le signe de la surface du triangle, on trouve

$$\overline{OD}^2 \text{ surf. ABC} - \overline{OA}^2 \text{ surf. BCD} + \overline{OB}^2 \text{ surf. ACD}$$
$$- \overline{OC}^2 \text{ surf. ABD} = 0 \text{ (*)}.$$

Mais les quatre triangles étant inscrits dans un même cercle, leurs surfaces sont proportionnelles au produit des trois côtés. On a donc

$$\overline{OD}^2.\text{AB.AC.BC} - \overline{OA}^2.\text{BC.BD.CD} + \overline{OB}^2.\text{AC.AD.CD}$$
$$- \overline{OC}^2.\text{AB.AD.BD} = 0.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

C'est une relation très-importante entre les distances de quatre points sur un cercle et celles d'un cinquième point quelconque du plan aux quatre premiers. Si, par exemple, on fait coïncider le point O avec l'un des quatre points, avec A par exemple, on trouve la relation

$$AC.BD = AD.BC + AB.CD,$$

qui constitue le théorème de Ptolémée.

5. *Condition pour que l'équation du second degré représente deux droites.*

Soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{6}$$

l'équation proposée. Si l'équation représente une courbe à centre unique, on doit exprimer que le centre se trouve sur la courbe, et les coordonnées de ce centre doivent satisfaire aux trois équations

$$\left\{\begin{aligned} 2Ax + By + D &= 0,\\ Bx + 2Cy + E &= 0,\\ Dx + Ey + 2F &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La condition cherchée est donc le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \tag{8}$$
$$= -2[AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC)] = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équation représente deux droites. Cela est évident d'après notre méthode, si la courbe est à centre unique, car alors les coordonnées du centre vérifient la troisième des équations (7); mais si la courbe est du genre parabole, si l'on a

$$B^2 - 4AC = 0,$$

notre méthode ne s'applique plus. Cependant, dans ce cas, l'équation (8) se réduit à

$$AE^2 - BDE + CD^2 = 0,$$

ou en remplaçant C par sa valeur

$$\frac{1}{4A}(2AE - BD)^2 = 0;$$

en sorte qu'on a les deux équations

$$\begin{aligned} BD - 2AE &= 0, \\ B^2 - 4AC &= 0, \end{aligned}$$

qui expriment que l'on a une ligne de centres.

Donc, dans tous les cas, la condition que nous avons trouvée est nécessaire et suffisante.

6. *Condition pour qu'une droite*

$$(9) \qquad mx + ny + p = 0$$

soit tangente à la courbe du second degré

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

L'équation de la tangente au point $x'y'$ est

$$(10) \quad (2Ax' + By' + D)x + (Bx' + 2Cy' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = 0.$$

Pour que cette équation représente la même droite que l'équation (9), il faut que les coefficients des deux équations soient proportionnels, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned} 2Ax' + By' + D &= \lambda m, \\ Bx' + 2Cy' + E &= \lambda n, \\ Dx' + Ey' + 2F &= \lambda p, \end{aligned}$$

Il faut en outre exprimer que le point de contact se trouve sur la tangente, ce qui donne

$$mx' + ny' + p = 0.$$

On a donc à éliminer x', y', λ entre les quatre équations

$$\begin{aligned}
2Ax' + By' - \lambda m + D &= 0,\\
Bx' + 2Cy' - \lambda n + E &= 0,\\
Dx' + Ey' - \lambda p + 2F &= 0,\\
mx' + ny' + 0\times\lambda + p &= 0.
\end{aligned}$$

Le résultat de cette élimination s'obtient en égalant à 0 le déterminant

$$\begin{vmatrix}
2A & B & -m & D\\
B & 2C & -n & E\\
D & E & -p & 2F\\
m & n & 0 & p
\end{vmatrix},$$

qu'on peut écrire en remplaçant l'une par l'autre les deux dernières colonnes et changeant tous les signes de la troisième :

$$(11)\qquad \begin{vmatrix}
2A & B & D & m\\
B & 2C & E & n\\
D & E & 2F & p\\
m & n & p & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est symétrique. En le développant, on trouve

$$\begin{aligned}
(E^2 - 4CF)m^2 + (D^2 - 4AF)n^2 + (B^2 - 4AC)p^2&\\
+ 2mn(2BF - ED) + 2mp(2CD - BE)&\\
+ 2np(2AE - BD) &= 0.
\end{aligned}$$

Par exemple, pour que l'axe des x soit tangent à la courbe, il faut que cette équation soit vérifiée par les valeurs

$$m = 0, \quad p = 0;$$

ce qui donne

$$D^2 - 4AF = 0.$$

Pour qu'une tangente puisse s'éloigner indéfiniment, il faut que l'on ait à la fois

$$m = 0, \quad n = 0;$$

ce qui donne

$$B^2 - 4AC = 0.$$

7. *Équation du plan passant par trois points.*

Cette équation est obtenue immédiatement sous la forme d'un déterminant. C'est

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, ce déterminant développé peut s'écrire

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} & z \begin{vmatrix} y' & z' & 1 \\ y'' & z'' & 1 \\ y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & z' & 1 \\ x'' & z'' & 1 \\ x''' & z''' & 1 \end{vmatrix} \\ & + z \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit donc qu'égalé à 0 il donne l'équation d'un plan. D'ailleurs ce plan passe par les trois points $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$; car deux lignes du déterminant deviennent identiques quand on remplace x, y, z, par x', y', z', par exemple.

Si l'on examine les coefficients de x, y, z, on voit qu'ils représentent les surfaces des triangles formés dans les trois plans coordonnés par les projections des trois points donnés. D'après cela, désignons par S la surface du triangle formé dans l'espace par les trois points $'$, $''$, $'''$, et par α, β, γ les angles du plan avec les trois plans coordonnés. Les coefficients de x, y, z seront $S\cos\alpha$, $S\cos\beta$, $S\cos\gamma$, et l'équation du plan prendra la forme

$$(14) \qquad 2S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation remarquable va nous conduire à deux conséquences. Appelons p la distance de l'origine au plan, le dernier terme de l'équation précédente devra être égal à $2Sp$, et l'on aura

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 2Sp;$$

donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

représente six fois le volume du tétraèdre ayant pour sommets l'origine et les trois points $'$, $''$, $'''$. De plus, le premier membre de l'équation (14) ou, ce qui revient au même, de l'équation (12) pourra s'écrire

$$2S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p).$$

On aura

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = 2S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p).$$

D'ailleurs $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$ représente, au signe près, la distance du point xyz au plan et le second membre est égal à six fois le volume du tétraèdre formé par les quatre points xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$. Si l'on désigne par V ce volume, on a donc

$$(16)\qquad 6V = \pm \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Voici la règle des signes, qui est simple.

Imaginons un observateur ayant les pieds sur le plan des trois points $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$, placé du côté du point xyz et regardant successivement ces trois points dans l'ordre précédent. Si le mouvement de rotation qu'il est obligé de faire a lieu de droite à gauche, on aura le volume avec le signe $+$; s'il est en sens contraire, il faudra changer le signe du déterminant. Nous n'insistons pas sur la démonstration de cette règle.

8. *Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône ou un cylindre.*

Soit l'équation à trois variables

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Exprimons que le centre se trouve sur la surface. Nous aurons les quatre équations

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}x \;+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z\;+\mathrm{C}\;=\mathrm{o},\\
&\mathrm{B}''x+\mathrm{A}'y\;+\mathrm{B}z\;\;+\mathrm{C}'=\mathrm{o},\\
&\mathrm{B}'x+\mathrm{B}y\;\;+\mathrm{A}''z+\mathrm{C}''=\mathrm{o},\\
&\mathrm{C}x\;\;+\mathrm{C}'y\;+\mathrm{C}''z+\mathrm{D}\;=\mathrm{o}.
\end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination de xyz est le déterminant

$$(17)\qquad \begin{vmatrix}
\mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' & \mathrm{C}\\
\mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} & \mathrm{C}'\\
\mathrm{B}' & \mathrm{B} & & \mathrm{C}''\\
\mathrm{C} & & \mathrm{C}'' & \mathrm{D}
\end{vmatrix}=\mathrm{o};$$

mais il se présente la même difficulté que dans le cas de deux variables.

Il est évident que si la surface a un centre, elle sera un cône; car l'équation de condition exprime en définitive que si l'on rapporte la surface à son centre le terme constant est nul. Il est encore évident que si la surface est un cylindre, cette condition est vérifiée; car on peut obtenir cette condition de la manière suivante. Résolvant les trois équations du centre, nous obtiendrons des formules de la forme

$$x=\frac{\mathrm{L}}{\Delta},\quad y=\frac{\mathrm{M}}{\Delta},\quad z=\frac{\mathrm{N}}{\Delta};$$

portant ces valeurs dans la dernière équation, notre équation de condition sera

$$\mathrm{CL}+\mathrm{C}'\mathrm{M}+\mathrm{C}''\mathrm{N}+\mathrm{D}\Delta=\mathrm{o}.$$

Or, dans le cas où la surface représente un cylindre, on a

$$\mathrm{L}=\mathrm{o},\quad \mathrm{M}=\mathrm{o},\quad \mathrm{N}=\mathrm{o},\quad \mathrm{D}=\mathrm{o};$$

Ainsi, dans le cas où la surface est un cône ou un cylindre, l'équation (17) sera satisfaite. Mais la réciproque n'est évidente que dans le cas des surfaces à centre unique. Il faut donc établir la réciproque et montrer que, dans le cas où l'on a

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = 0.$$

la condition (17) exprime que la surface est un cylindre. On ne peut faire ce calcul d'une manière élégante qu'en ayant recours à des propriétés nouvelles des déterminants. Mais nous allons développer les calculs. Le déterminant (17) développé devient

$$\begin{aligned} &C^2(B^2 - A'A'') + C'^2(B'^2 - AA'') + C''^2(B''^2 - AA') \\ &\quad + 2CC'(A''B'' - BB') + 2CC''(A'B' - BB'') \\ &\quad + 2C'C''(AB - B'B'') \\ &\quad + D(AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2). \end{aligned}$$

Si le déterminant des équations du centre est nul, notre condition se réduit à

$$\begin{aligned} &C^2(B^2 - A'A'') + C'^2(B'^2 - AA'') + C''^2(B''^2 - AA') \\ &\quad + 2CC'(A''B'' - BB') + 2CC''(A'B' - BB'') \\ &\qquad\qquad + 2CC''(AB - B'B'') = 0. \end{aligned}$$

Or cette équation homogène en $CC'C''$ est un carré parfait, en vertu de la condition

$$(18) \qquad AA'A'' + 2BB'B'' + AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = 0,$$

comme il est facile de s'en assurer. On peut l'écrire

$$0 = \frac{1}{B^2 - A'A''}[(B^2 - A'A'')C + C'(BB' - A''B'') + C''(BB'' - A'B')^2]$$

ou

$$\frac{1}{B^2 - A'A''}\begin{vmatrix} B'' & B' & C \\ A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \end{vmatrix}^2 = 0,$$

ou encore, en permutant les lettres,

$$\frac{1}{B'^2 - AA''}\begin{vmatrix} B & B''' & C' \\ A'' & B' & C''' \\ B' & A & C \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{1}{B''^2 - A'A}\begin{vmatrix} B' & B & C'' \\ A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \end{vmatrix}^2 = 0.$$

On reconnaît là, avec l'équation (18), la deuxième condition pour que les trois équations du centre se réduisent à deux, c'est-à-dire pour que la surface représente un cylindre, le mot *cylindre* étant pris dans son acception la plus générale.

Enfin il y aurait à examiner le cas où $B^2 - A'A''$, $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$ sont nuls simultanément; mais nous négligeons l'examen de ce cas très-particulier.

On peut, du reste, éviter cette discussion en prenant une autre propriété commune aux cônes et aux cylindres. Par exemple, on pourrait exprimer que le plan polaire passe par un point fixe ou est parallèle à une droite fixe; ce qui entraînerait l'équation

$$\begin{aligned} &\alpha(Ax + B''y + B'z + C) + \beta(B''x + A'y + Bz + C') \\ &\quad + \gamma(B'x + By + A''z + C'') + \delta(Cx + C'y + C''z + D) = 0, \end{aligned}$$

équation qui, devant être satisfaite quelles que soient les valeurs de x, y, z, conduirait d'une manière rigoureuse, et dans tous les cas, à la condition trouvée.