NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

# Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 8 (1869), p. 86-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__86_1>

# SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

## *Généralisation de la Question* 836 (*)

(voir 2e série, t. VI, p 526);

PAR M. FOURET,
Lieutenant du Génie.

Le théorème qui fait l'objet de la Question 836 n'est qu'un cas particulier du suivant.

*Lorsque quatre surfaces du second ordre ont une intersection commune, les plans polaires d'un point quelconque par rapport à ces surfaces :* 1° *passent par un même point;* 2° *ont un rapport anharmonique constant.*

1. Pour démontrer ce théorème, imaginons quatre surfaces du deuxième ordre ayant pour intersection commune la courbe T, et coupons ces surfaces par un plan quelconque Q passant par le point P. Les quatre courbes obtenues ont quatre points communs situés à la rencontre du plan et de la courbe T. Les polaires du point P par rapport à ces courbes passent donc par un même point (CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 203). Or ces polaires étant les intersections des plans polaires par le

(*) Voir une solution analytique de cette question dans le numéro d'octobre 1868, t. VII, p. 445.

plan Q, et la direction de ce dernier plan étant arbitraire, on voit que les plans polaires ont une infinité de points communs, lesquels sont nécessairement sur une même ligne droite $\Delta$.

2. Les plans polaires, puisqu'ils passent par une même droite, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre polaires (CHASLES, *Traité de Géométrie supérieure*, p. 14). Or lorsque le point I se déplace dans le plan Q, le rapport anharmonique de ses quatre polaires ne change pas (CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 205); et comme le plan Q est arbitraire, il en est de même du rapport anharmonique des quatre plans polaires du point P, lorsque ce point se déplace d'une manière quelconque dans l'espace.

Si, en particulier, on prend le point P sur la courbe T, les plans polaires deviennent les plans tangents en ce point; ils se coupent suivant la tangente à T, et le théorème leur est applicable.

Le théorème proposé résulte immédiatement de celui que nous venons de démontrer; il suffit de remarquer que les sommets du tétraèdre ABCD sont les sommets de quatre cônes du deuxième ordre (réels ou imaginaires) contenant la courbe T, et que les plans menés par la droite A et les sommets de ce tétraèdre sont les plans polaires du point P par rapport à ces quatre cônes.

---

## *Question* 875

(voir 2<sup></sup>e serie, t. VII, p. 238),

PAR E. PELLET,

Eleve du lycee de Nimes.

ENONCÉ. — *Construisons deux ellipses* P *et* P′ *telles, que les demi-axes de la première coïncident en direction* *avec ceux de la seconde, mais soient respectivement proportionnels à leurs carrés :*

1° *Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres quelconques* $D_1$ *et* $D_2$ *de l'ellipse* P, *vaut le parallélogramme construit sur les demi-axes de cette ellipse assemblés sous l'angle* $\zeta$ *que forment entre eux les conjugués respectifs de* $D_1$ *et* $D_2$ *dans l'ellipse* P';

2° *Lorque les diamètres* $D_1$ *et* $D_2$ *sont conjugués dans l'ellipse* P, *leurs conjugués respectifs dans l'ellipse* P' *se coupent à angle droit ;*

3° *Le secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres* $D_1$ *et* $D_2$ *dans l'ellipse* P, *est proportionnel à l'angle* $\zeta$ *ou à la courbure de l'arc qu'ils interceptent sur l'ellipse* P' ;

4° *Lorsqu'un point décrit une ellipse* P *par l'action d'une force dirigée vers son centre, le rayon vecteur conjugué, par rapport à l'ellipse* P', *de celui qui passe par le point mobile, tourne autour du centre d'un mouvement uniforme ;*

5° *Les perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres quelconques* $D_1$ *et* $D_2$ *de l'ellipse* P *sur les directions qui leur sont réciproquement conjuguées dans l'ellipse* P', *sont égales entre elles ;*

6° *Comment ces énoncés se modifient-ils pour l'hyperbole ?*

(P. Gilbert, *Bulletin de la Société Philomathique,* 26 octobre 1867.)

I. Soient

$$(p) \qquad \frac{k^2 x^2}{a^4} + \frac{k^2 y^2}{b^4} = 1,$$

$$(p') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

les équations des ellipses P et P'.

Le diamètre $D_1$ de P, $\left(\dfrac{x}{\dfrac{a^2\cos u}{k}} = \dfrac{y}{\dfrac{b^2\sin u}{k}}\right)$, a pour conjugué, dans l'ellipse P′,

$$\frac{a^2\cos u}{k}\,\frac{x}{a^2} + \frac{b^2\sin u}{k}\,\frac{y}{b^2} = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$(D'_1) \qquad x\cos u + y\sin u = 0.$$

L'équation de $D_2$ étant

$$\frac{x}{\dfrac{a^2\cos u'}{k}} = \frac{y}{\dfrac{b^2\sin u'}{k}},$$

le diamètre conjugué dans P′ aura pour équation

$$(D'_2) \qquad x\cos u' + y\sin u' = 0.$$

L'angle ($\zeta$) des deux diamètres $D'_1$, $D'_2$ est

$$u' - u = \zeta.$$

D'autre part, le parallélogramme construit sur $D_1$ et $D_2$ a pour expression

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a^2\cos u}{k}, & \dfrac{b^2\sin u}{k} \\ \dfrac{a^2\cos u'}{k}, & \dfrac{b^2\sin u'}{k} \end{vmatrix} = \frac{a^2 b^2}{k^2}\sin(u' - u) = \frac{a^2 b^2}{k^2}\sin\zeta;$$

donc : « Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres quelconques $D_1$ et $D_2$ de l'ellipse P vaut le parallélogramme construit sur les demi-axes de cette ellipse assemblés sous l'angle $\zeta$ que forment entre eux les conjugués respectifs de $D_1$ et $D_2$ dans l'ellipse P′. »

II. Si les deux diamètres $D_1$ et $D_2$ sont conjugués, on a

$$\cos u \cos u' + \sin u \sin u' = 0,$$

ou

$$u' - u = \zeta = 90^\circ;$$

donc : « Lorsque les diamètres $D_1$ et $D_2$ sont conjugués dans l'ellipse P. leurs conjugués respectifs dans l'ellipse P′ se coupent à angle droit. »

III. Le secteur elliptique entre les deux demi-diamètres $D_1$ et $D_2$ dans l'ellipse P est égal à

$$\frac{a^2 b^2}{k^2}(u' - u) = \frac{a^2 b^2}{k^2}\zeta,$$

et, par conséquent, proportionnel à $\zeta$ ou encore à la courbure de l'arc qu'ils interceptent sur l'ellipse P′, puisque les tangentes menées aux extrémités de cet arc sont respectivement parallèles aux diamètres $D'_1$ et $D'_2$, conjugués de $D_1$ et $D_2$ dans l'ellipse P′.

IV. Si un point décrit l'ellipse P par l'action d'une force dirigée vers son centre, les aires décrites par son rayon vecteur ($D_1$) seront proportionnelles au temps, et par suite, on aura $\zeta = kt$. Le rayon ($D'_1$) conjugué de $D_1$ dans l'ellipse P′ tournera donc autour du centre d'un mouvement uniforme.

V. « Les perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres quelconques $D_1$ et $D_2$ de l'ellipse P sur les directions qui leur sont réciproquement conjuguées dans l'ellipse P′, sont égales entre elles. » En effet, ces deux distances sont égales, d'après les formules ($D'_1$) et ($D'_2$), à

$$\frac{a^2}{k}\cos u \cos u' + \frac{b^2}{k}\sin u \sin u'.$$

VI. Si l'ellipse P' est remplacée par une hyperbole, les théorèmes précédents subsistent sans modification, car ils sont indépendants du signe de $a^2$ et de $b^2$.

*Note.* — Nous avons reçu les solutions de MM. Jasseron, élève du lycée de Besançon; Paul Endrès, du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Griolet (Henri), du lycée de Grenoble.

Toutes sont à peu près semblables; nous avons préféré celle de M Pellet, parce que les calculs nous ont paru plus élégants et la rédaction plus concise. Nous profitons de cette occasion pour recommander à nos Correspondants d'apporter un soin tout particulier dans la rédaction des travaux qu'ils nous envoient pour les *Nouvelles Annales* et dans le tracé des figures qui parfois les accompagnent. J. B.

---

## *Question* 889.

(voir 2e série, t. VII, p. 335);

PAR M. SCHLEGEL,

Étudiant de Mathématiques à Berlin, Membre de la Société d'étudiants de Mathématiques.

*Démontrer que le nombre des solutions entières et positives de l'équation*

$$(\mathrm{I}) \qquad x + y + z = \mathrm{N}$$

*sous les conditions*

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x \overline{\gtrless} y + z; \\ y \overline{\gtrless} z + x, \\ z \overline{\gtrless} x + y, \end{array} \right.$$

*est* $\frac{\mathrm{N}^2 - 1}{8}$ *ou* $\frac{(\mathrm{N}+2)(\mathrm{N}+4)}{8}$, *suivant que* N *est un nombre impair ou pair?* (CH. HERMITE.)

Soient $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \mathrm{N} - \alpha - \beta$ une des valeurs entières et positives qui satisfont à la question proposée.

*Premier cas* : N *impair* $= 2\lambda + 1$. — Il faut que $x, y, z$ satisfassent aux inégalités

$$\alpha \leqq \beta + (N - \alpha - \beta) \quad \text{ou} \quad \alpha \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha < \lambda + \frac{1}{2},$$

$$\alpha \leqq (N - \alpha - \beta) + \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \beta < \lambda + \frac{1}{2},$$

$$N - \alpha - \beta \leqq \alpha + \beta \quad \text{ou} \quad \beta \geqq \frac{N}{2} - \alpha \quad \text{ou} \quad \beta > \lambda - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Donc pour une valeur fixe de $\alpha$ entre les limites 1 et $\lambda$

la plus petite valeur de $\beta$ sera...... $\lambda - (\alpha - 1)$,
la plus grande valeur............. $\beta = \lambda$.

Il suit de là que $\beta$ accepte $\alpha$ valeurs pour la valeur $\alpha$ de $x$; donc le nombre des solutions entières et positives de l'équation (I) sous les conditions (II) sera

$$L = 1 + 2 + \ldots + \lambda = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\lambda} \alpha = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\alpha}$$

$$= \frac{(N-1)(N+1)}{8} = \frac{N^2 - 1}{8} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

*Deuxième cas* : N *pair* $= 2\lambda$. — Il faut que $x, y, z$ satisfassent aux inégalités

$$\alpha \leqq \beta + (N - \alpha - \beta) \quad \text{ou} \quad \alpha \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha \leqq \lambda,$$

$$\beta \leqq (N - \alpha - \beta) + \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \leqq \frac{N}{2} \quad \text{ou} \quad \beta \leqq \lambda,$$

$$N - \alpha - \beta \leqq \alpha + \beta \quad \text{ou} \quad \beta \geqq \frac{N}{2} - \alpha \quad \text{ou} \quad \beta \geqq \lambda - \alpha.$$

Donc, pour une valeur fixe de $\alpha$ entre les limites o et $\lambda$,

la plus petite valeur de $\beta$ sera....... $\lambda - \alpha$,
la plus grande valeur.............. $\beta = \lambda$.

$\beta$ peut ainsi accepter $\alpha + 1$ valeurs pour $x = \alpha$; donc le nombre des solutions entières et positives de l'équation (I) sous les conditions (II) sera

$$S = 1 + 2 + \ldots + (\lambda + 1) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\lambda} (\alpha + 1)$$

$$= \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 1)}{2} = \frac{(N + 2)(N + 4)}{8}.$$

C. Q. F. D.

*Note.* — Nous avons reçu deux autres solutions analogues : l'une de M. Valher, du collége Rollin; l'autre de M. Léon Geoffroy, élève de l'École Centrale.

*Note du Rédacteur.* — Un Professeur, très-connu des lecteurs de nos *Annales*, nous a fait remarquer que l'énoncé de la question 889 devient plus clair si l'on y ajoute que les solutions de l'équation $x + y + z = N$ doivent être regardées comme différentes, lorsque le premier membre se compose des mêmes nombres rangés dans un ordre différent.

Il propose la question suivante plus générale :

*Quel est le nombre des solutions positives et entières de l'équation*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = N:$$

*on regarde comme différentes les solutions qui ne diffèrent que par l'ordre des nombres* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

En supposant $m$ inconnues positives non supérieures à $\frac{N}{2}$, et faisant

$$S_i = \frac{m(m+1)\ldots(m+i-1)}{1.2\ldots i} = \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+m-1)}{1.2\ldots(m+1)},$$

il trouve pour le nombre des solutions :

1° Si N est pair,

$$S_N - mS_{\frac{N-2}{2}};$$

2° Si N est impair,

$$S_N - m S_{\frac{N-1}{2}}.$$

On retombe sur les formules de M. Hermite, si l'on fait $m = 3$.