NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DARBOUX

Discussion de la fraction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 81-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__81_1>

DISCUSSION DE LA FRACTION

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'};$$

PAR M. DARBOUX.

Nous nous appuierons sur les lemmes suivants :

LEMME I. — *Considérons les deux équations du second degré*

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0. \tag{2}$$

Soient α, β *les racines de la première équation,* α', β' *les racines de la seconde. On a l'identité*

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(-bb' + 2ac' + 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') \\ &\quad = 4a^2a'^2(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta'). \end{aligned} \right.$$

Cette identité se démontre très-facilement, il suffit, par exemple, de remplacer b, c, b', c' par leurs expressions en fonction de a, a' et des sommes et produits des racines.

Comme on a d'ailleurs, en vertu de la décomposition du trinôme

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha')(x - \beta'),$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Nous voyons que le premier membre de l'identité (3), premier membre que nous désignerons par Δ, peut s'écrire des deux manières suivantes :

$$(4) \qquad \Delta = 4a^2(a'\alpha^2 + b'\alpha + c')(a'\beta^2 + b'\beta + c'),$$

$$(5) \qquad \Delta = 4a'^2(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c).$$

Lemme II. — *L'équation $\Delta = 0$ donne la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du second degré* (1) *et* (2) *aient une racine commune.*

En effet, si nous nous reportons à l'identité (3), nous reconnaissons que la condition nécessaire et suffisante pour que Δ soit nul, c'est que l'un des quatre facteurs

$$\alpha - \alpha', \quad \alpha - \beta', \quad \beta - \alpha', \quad \beta - \beta'$$

soit nul, c'est-à-dire qu'une des racines α, β soit égale à une des racines α', β'.

Lemme III. — *La quantité Δ ne peut être négative que si les quatre racines α, β, α', β' sont réelles, et il faut en outre que l'une des racines du numérateur, et une seule, soit comprise entre les deux racines du dénominateur.*

En d'autres termes, supposons qu'on porte sur une droite des longueurs

$$\mathrm{OA} = \alpha, \qquad \mathrm{OB} = \beta,$$
$$\mathrm{OA'} = \alpha', \qquad \mathrm{OB'} = \beta',$$

il faut, suivant l'expression de M. Chasles, que les segments AB, A'B' empiètent l'un sur l'autre.

Démonstration. — Supposons en effet que les racines d'une des équations de la première, par exemple, soient imaginaires. Alors, d'après l'identité (4), Δ devra être considéré comme un produit de deux facteurs imaginaires

$$(6) \qquad 2a(a'\alpha^2 + b'\alpha + c) \quad \text{et} \quad 2a(a'\beta^2 + b'\beta + c).$$

Ces facteurs sont conjugués puisque α et β sont conjugués. Donc Δ est positif.

Considérons maintenant le cas où les quatre racines α, β, α', β' sont réelles. Si Δ est négatif, les deux facteurs de Δ (6) seront de signes contraires. Le trinôme

$$a'x^2 + b'x + c'$$

aura donc pour α et β des valeurs de signes contraires; il y aura donc une des racines de ce trinôme, et une seule, dans l'intervalle de α à β.

Si l'un des segments, AB par exemple, comprend l'autre, ou, s'ils n'ont aucune partie commune, dans ce cas Δ sera positif.

Discussion de l'expression $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. — Soit y une des valeurs de cette expression. Si l'on se propose de déterminer x connaissant y, il faudra que les valeurs de x soient réelles. Les valeurs de x sont données par l'équation

$$(7) \qquad (a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0.$$

La condition de réalité est

$$(b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y) > 0,$$
$$(b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(-bb' + 2ac' + 2ca')y + b^2 - 4ac > 0.$$

Ce trinôme ne pourra pas se décomposer en facteurs réels du second degré dans le cas où l'expression

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = \Delta$$

sera négative; mais, dans ce cas, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

auront leurs racines réelles, on aura

$$b'^2 - 4a'c' > 0,$$

et l'inégalité sera toujours satisfaite.

Donc y pourra prendre toutes les valeurs possibles.

Si $\Delta > 0$, y aura toujours un maximum et un minimum, et dans ce cas la discussion ne présente aucune difficulté.

Enfin quand $\Delta = 0$, une des racines α, β est égale à une des racines α', β' ; le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun qu'on pourra faire disparaître, et y prendra alors toutes les valeurs.

Nous insisterons en terminant sur la propriété suivante :

Théorème. — *Si l'on porte sur une droite à partir d'une origine fixe des longueurs* OM, OM′ *égales aux deux valeurs de x pour lesquelles y reçoit une même valeur, ces points* M, M′ *sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes : en d'autres termes, ils forment une involution.*

En effet, les deux nombres x', x'', pour lesquels y prend la même valeur, sont donnés par l'équation (7). On obtient donc les deux relations

$$x' + x'' = -\frac{b - b'y}{a - a'y}, \quad x'x'' = \frac{c - c'y}{a - a'y}.$$

Éliminons y entre ces deux équations, nous trouvons la relation

$$(ca' - ac')(x' + x'') + (ba' - ab')x'x'' + cb' - bc' = 0,$$

équation de la forme

$$Ax'x'' + B(x' + x'') + C = 0,$$

ou

$$A\left(x' + \frac{B}{A}\right)\left(x'' + \frac{B}{A}\right) + C - \frac{B^2}{A} = 0.$$

On voit bien que le produit des distances des points x',

x'' au point dont l'abscisse est $-\frac{B}{A}$ est constant, ce qui est le caractère même de l'involution.

Si les deux points x', x'' viennent se confondre, la fonction devient maxima ou minima, et l'on a les points doubles réels ou imaginaires de l'involution par la formule

$$(8)\qquad (ba' - ab')x^2 + 2(ca' - ac')x + cb' - bc' = 0.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'expression qui détermine la nature des racines de cette équation, que l'invariant

$$(ca' - ac')^2 - (ba' - ab')(cb' - bc')$$

est égal à $\frac{\Delta}{4}$.

Nous terminerons en faisant une application géométrique de ce qui précède.

Soient les deux courbes du second degré

$$S = 0, \quad S' = 0.$$

L'équation générale des courbes passant par leur intersection sera

$$S + \lambda S' = 0.$$

Coupons ces courbes par une droite quelconque, que nous aurons prise pour axe des x, il faudra faire $y = 0$ dans l'équation précédente, qui se réduira à une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x + b'x + c') = 0,$$

ou

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = -\lambda.$$

On voit donc que *si l'on considère les coniques passant par quatre points fixes, elles déterminent sur une droite* *quelconque des segments en involution.* C'est le théorème de Desargues généralisé par Sturm.

Quoique les considérations précédentes ne présentent rien d'absolument nouveau, nous avons cru devoir les rédiger dans l'intérêt des élèves.