NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

W.-A. WHITVORTH

La spirale équiangle, ses principales propriétés prouvées géométriquement, traduit de The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 5-16

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

LA SPIRALE ÉQUIANGLE,

SES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS PROUVÉES GÉOMÉTRIQUEMENT (*).

Traduit de *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics.*

Parmi les propositions suivantes, celles qui donnent des constructions géométriques pour les centres de gravité d'un arc et d'une aire de spirale offrent seules des résultats qui seront probablement nouveaux pour le lecteur. On a ajouté les autres propositions en pensant qu'il serait agréable d'avoir les démonstrations géométriques des principales propriétés de cette belle courbe réunies en un seul article, et l'auteur espère qu'on trouvera profitable et intéressant le nouvel aspect sous lequel il a présenté ici la courbe.

DÉFINITION. — *Toute courbe partant d'un point fixe, appelé* pôle, *et telle, que l'arc intercepté entre ce point et tout autre point de la courbe soit toujours semblable à lui-même, est appelée* spirale équiangle (**).

(*) Le lecteur est prié de faire les figures en se guidant sur celle du texte.

(**) Des différentes definitions des figures semblables, la plus convenable à adopter est la suivante : Deux courbes sont dites *semblables* lorsque par deux points semblablement placés de chacune d'elles, on peut mener deux cordes telles, que leurs longueurs et celles de deux autres cordes également inclinées sur elles soient proportionnelles.

Nous avons préféré cette définition à la définition usuelle, parce que les démonstrations que nous allons présenter sont fondées sur la propriété de similitude continuelle plutôt que sur celle d'où la courbe a tiré son nom. Nous pensons d'ailleurs que la propriété par nous adoptée est plus naturelle que celle qui sert à définir la courbe, et, si l'on peut parler ainsi, *plus complétement intrinsèque*, puisqu'elle embrasse seulement la forme de la courbe, en dehors des accessoires, tels que la tangente et le rayon vecteur.

Nous allons déduire de notre définition la propriété qui la définit ordinairement et d'où lui est venu son nom.

Proposition I. — *La tangente en un point d'une spirale équiangle fait un angle constant avec le rayon vecteur du point de contact.*

Car, soient OP, OQ deux rayons polaires quelconques dans la spirale OKP; OP′, OQ′ deux autres rayons faisant des angles égaux POP′, QOQ′ avec les deux premiers.

Alors, puisque OKP, OKQ sont des figures semblables, et que OP′, OQ′ font des angles égaux avec les lignes correspondantes OP, OQ, OPP′, OQQ′ seront des triangles semblables, et les angles OPP′, OQQ′ sont égaux; donc, à la limite, lorsque P′, Q′ seront venus coïncider avec P, Q, les tangentes en P et en Q feront des angles égaux avec les rayons vecteurs, et ces points sont deux points quelconques de la courbe. Donc, etc.

C. Q. F. D.

Définition. — L'angle constant que fait la tangente avec le rayon vecteur est appelé l'*angle de la spirale*. Dans la suite, nous le désignerons toujours par α.

Proposition II. — *Si sur un rayon vecteur quelconque* OP, *on construit un triangle* OPQ *semblable à un triangle donné, le lieu du sommet* Q *sera une spirale semblable à la spirale originaire.*

En effet, soient OP, OP′ deux rayons polaires quelconques; OQP, OQ′P′ les triangles construits sur ces rayons. Alors, puisque ceux-ci sont semblables, nous avons

$$OP : OP' = OQ : OQ'.$$

D'ailleurs, puisque les angles POQ, P′OQ′ sont égaux, ajoutons (ou retranchons) l'angle QOP′, les angles POP′, QOQ′ seront égaux, et il est démontré qne

$$OP : OP' = OQ : OQ';$$

donc PP′, QQ′ sont des courbes semblables, OP, OQ étant des lignes correspondantes.

Donc, etc. C. Q. F. D.

Proposition III. — *Si du pôle* O *on mène une ligne* OQ *à angle droit sur le rayon vecteur* OP, *de façon à rencontrer la normale à* P *en* Q, *le lieu du point* Q *est la développée de la spirale, et est une spirale semblable, et* Q *est le centre de courbure au point* P.

En effet, l'angle OPQ est le complément de l'angle de la spirale, donc l'angle OQP est égal à l'angle de la spirale, donc le triangle OQP est toujours semblable à lui-même, où que le point P soit pris.

Donc (Proposition II) le lieu de Q est une spirale semblable, et puisque OQP est égal à l'angle de la spirale, QP est la tangente en Q au lieu de Q, donc le lieu de Q est l'enveloppe de la normale PQ, ou bien est la développée de la courbe, et Q est le centre de courbure en P. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Prolongeons le rayon vecteur* PO *jusqu'en* V, *en prenant* OV *égal à* OP, *alors* PV *est la corde de courbure par* O.

En effet, puisque Q est le centre du cercle de courbure et que QO rencontre PV à angle droit, P est sur le cercle aussi bien que V, donc PV est la corde.

Corollaire II. — Si OY est la perpendiculaire sur la tangente en P, nous avons

$$\mathrm{OY} = \mathrm{OP}\sin\alpha,$$
$$\mathrm{OP} = \mathrm{PQ}\sin\alpha,$$

ou, en employant la notation usuelle de l'analyse,

$$p = r\sin\alpha, \quad r = \rho\sin\alpha.$$

Proposition IV : Problème. — *Trouver la longueur de l'arc compris entre le pôle et un point fixe quelconque.*

Soient OP, OP′ deux rayons polaires très-voisins l'un de l'autre; alors, puisque OKP, OKP′ sont des courbes semblables (Définition),

$$\mathrm{arc\,OKP} : \mathrm{arc\,OKP'} = \mathrm{OP} : \mathrm{OP'};$$

donc

$$\mathrm{arc\,OKP} : \mathrm{arc\,PP'} = \mathrm{OP} : (\mathrm{OP'} - \mathrm{OP}).$$

Menons PN perpendiculaire sur OP′; alors, à la limite, quand PP′ diminue indéfiniment, $\mathrm{OP'} - \mathrm{OP} = \mathrm{P'N}$; donc, à la limite,

$$\mathrm{arc\,OKP} : \mathrm{PP'} = \mathrm{OP} : \mathrm{P'N},$$

ou

$$\mathrm{arc\,OKP} : \mathrm{OP} = \mathrm{PP'} : \mathrm{P'N} = \operatorname{séc}\alpha : 1;$$

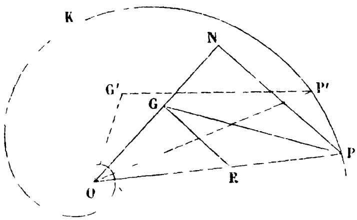
donc

$$\mathrm{arc\,OKP} = \mathrm{OP}\operatorname{séc}\alpha,$$

ou bien *la longueur de l'arc compris entre le pôle et un point fixe quelconque est égale au produit de la lon-*

gueur du rayon extrême par la sécante de l'angle de la spirale.

Proposition V : Problème. — *Trouver le centre de gravité d'un arc homogène de la spirale équiangle compris entre le pôle et un point fixe quelconque.*



Soient OKP la spirale, OP, OP′ deux rayons polaires voisins l'un de l'autre. Soit un certain point G le centre de gravité de OKP. Joignons OG, GP, et sur OP′ construisons le triangle OG′P′ semblable à OGP. Alors, puisque G, G′ sont des points correspondants dans les figures semblables OKP, OKP′, G′ est le centre de gravité de OKP′; donc GG′ prolongé doit passer par le centre de gravité de PP′. Pourvu qu'à la limite nous fassions mouvoir P′ jusqu'à coïncider avec P, nous pouvons prendre P comme centre de gravité de PP′, et à la limite, quand P, P′ coïncideront, G, G′ coïncideront, et GG′ deviendra la tangente en G au lieu de G; donc la tangente en G au lieu de G passe par P. Mais le lieu de G est, d'après la proposition II, une spirale semblable; donc l'angle OGP est le supplément de l'angle de la spirale.

De plus, puisque G, G′ sont les centres de gravité des arcs OKP, OKP′ et P le centre de gravité (à la limite) de leur différence, nous avons à la limite

$$\text{PG arc PP}' = \text{GG}' \text{ arc OKP}.$$

Mais par les figures semblables

$$PP' : GG' = OP : OG,$$

et par la proposition IV,

$$\text{arc}\,OKP = OP\,\text{séc}\,\alpha\,;$$

donc

$$PG = OG\,\text{séc}\,\alpha.$$

Menons PN perpendiculaire sur OG ; alors

$$GN = PG\cos\alpha = OG,$$

donc

$$OG = \frac{1}{2}ON.$$

Sur OP prenons

$$OR = \frac{1}{2}OP,$$

alors le cercle décrit sur OR comme diamètre passe par G ; donc G est le point d'intersection du cercle décrit sur OR comme diamètre avec le segment circulaire capable d'un angle supplémentaire de l'angle de la spirale décrit sur OP comme corde.

Ainsi G est déterminé. C. Q. F. F.

Corollaire. — Si O est le pôle, OP le rayon vecteur extrême d'une série de spirales équiangles de différents angles, les centres de gravité de leurs arcs sont tous sur le cercle passant par O, et ayant son centre sur OP à une distance de O égale à $\frac{OP}{4}$.

Proposition VI : Problème. — *Trouver l'aire engendrée par le rayon vecteur décrivant la spirale depuis le pôle jusqu'à un certain point donné.*

Soient OP, OP' deux rayons voisins l'un de l'autre, alors, puisque OKP, OKP′ sont des figures semblables, leurs aires sont en raison doublée de leurs lignes homologues; donc

$$\text{aire}\,OKP : \text{aire}\,OKP' = \overline{OP}^2 : \overline{OP'}^2,$$

et aussi

$$\text{aire}\,OKP : \text{aire}\,POP' = \overline{OP}^2 : (\overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2);$$

donc

$$\text{aire}\,OKP = \overline{OP}^2 \frac{\text{aire}\,POP'}{\overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2}.$$

Cela est toujours vrai, et par conséquent vrai à la limite quand P′ se meut jusqu'à coïncider avec P. Menons PN perpendiculaire sur OP′, alors

$$\text{aire}\,POP' = \frac{1}{2}\,OP'.PN \text{ à la limite,}$$

et

$$\overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2 = 2\,OP'.P'N \text{ à la limite;}$$

donc

$$\text{aire}\,OKP = \overline{OP}^2 \lim \frac{\frac{1}{2}OP'.PN}{2\,OP'.P'N} = \frac{1}{4}\overline{OP}^2 \tan g\alpha,$$

ou bien *l'aire engendrée par le rayon vecteur depuis le pôle jusqu'à un certain point est égale au quart du produit du carré du rayon extrême par la tangente de l'angle de la spirale.*

Proposition VII : Problème. — *Trouver le centre de gravité de l'aire engendrée par le rayon vecteur extrême entre le pôle et un certain point de la spirale équiangle.*

Soient OP, OP′ deux rayons adjacents. Prenons G pour le centre de gravité de l'aire OKP; alors comme dans la proposition V, G' semblablement placé dans OKP' sera le centre de l'aire OKP'.

Sur OP prenons OH égal à $\frac{2}{3}OP$, alors, à la limite, H est le centre de gravité de l'aire évanouissante OPP'; donc, comme dans la proposition V, l'angle OGH est le supplément de l'angle de la spirale, et

$$GG' \text{ aire } OKP = GH \text{ aire } OPP'.$$

Maintenant

$$\text{aire } OKP = \frac{1}{4}\overline{OP}^2 \tang \alpha \quad (\text{Prop. VI}),$$

$$\text{aire } OPP' = \frac{1}{2} OP . PP' \sin \alpha,$$

et

$$GG' : PP' : OG : OP$$

par les triangles semblables; donc

$$OG \text{ séc} \alpha = 2 GH;$$

donc, si nous menons HN perpendiculaire sur OG, nous aurons

$$GN = GH \cos \alpha = \frac{1}{2} OG;$$

donc

$$OG = \frac{2}{3} ON.$$

Sur ON prenons

$$OR = \frac{2}{3} OH = \frac{4}{9} OP,$$

alors le cercle décrit sur OR comme diamètre passe par G.

Donc G est le point d'intersection du cercle décrit sur OR comme diamètre avec le segment de cercle capable du supplément de l'angle de la spirale décrit sur OH comme corde, où

$$OH = \frac{2}{3} OP, \quad OR = \frac{4}{9} OP.$$

Ainsi G est déterminé. C. Q. F. F.

PROPOSITION VIII : PROBLÈME. — *Trouver le moment d'inertie de l'arc d'une spirale équiangle par rapport à une perpendiculaire par son pôle à son plan.*

Supposons égale à l'unité la masse de l'unité de longueur.

Soient OP, OP′ deux rayons quelconques, alors, puisque OKP, OKP′ sont des courbes semblables, nous avons

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{OP}^3} = \frac{\text{mom. d'inert. de OKP}'}{\overline{OP'}^3},$$

et par conséquent

$$= \frac{\text{mom. d'inert. de PP}'}{\overline{OP'}^3 - \overline{OP}^3},$$

et cela sera vrai à la limite, quand P′ coïncidera enfin avec P ; donc

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{OP}^3} = \frac{\overline{OP}^2 . PP'}{3\overline{OP}^2 . P'N} = \frac{1}{3} \operatorname{séc} \alpha,$$

ou bien

$$\text{mom. d'inert. de OKP} = \frac{1}{3} \overline{OP}^3 \operatorname{séc} \alpha ;$$

donc *le moment d'inertie d'un certain arc partant du pôle par rapport à une perpendiculaire à son plan par le pôle est le tiers du produit du cube du rayon extrême par la sécante de l'angle de la spirale.*

Proposition IX : Problème. — *Trouver le moment d'inertie de l'aire d'une spirale équiangle par rapport à une perpendiculaire à son plan par le pôle.*

Supposons égale à l'unité la masse de l'unité de surface.

Soient OP, OP′ deux rayons quelconques; alors, puisque OKP, OKP′ sont des courbes semblables, nous aurons

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{\text{OP}}^4} = \frac{\text{mom d'inert. de OKP}'}{\overline{\text{OP}'}^4},$$

et, par conséquent,

$$= \frac{\text{mom. d'inert. de POP}'}{\overline{\text{OP}'}^4 - \overline{\text{OP}}^4},$$

et cela est vrai aussi à la limite; donc

$$\frac{\text{mom. d'inert. de OKP}}{\overline{\text{OP}}^4} = \frac{\frac{1}{2}\overline{\text{OP}}^2 . \Delta\text{POP}'}{\overline{\text{OP}'}^4 - \overline{\text{OP}}^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\overline{\text{OP}}^3 . \text{PP}'\sin\alpha}{4\overline{\text{OP}}^3\,\text{PP}'\cos\alpha} = \frac{1}{16}\tan g\alpha.$$

Donc *le moment d'inertie de l'aire engendrée par le rayon vecteur décrivant un certain arc à partir du pôle, par rapport au pôle, est* $\frac{1}{16}$ *du produit de la quatrième puissance du rayon extrême par la tangente de l'angle de la spirale.*

Observation. — La même méthode peut s'appliquer dans un grand nombre d'autres cas.

Proposition X. — *Dans une spirale équiangle, les rayons polaires des points dont les angles vecteurs sont* *en progression arithmétique sont eux-mêmes en progression géométrique.*

Soient OP, OQ, OR trois rayons dont les angles vecteurs sont en progression arithmétique, alors les angles POQ, QOR sont égaux. Donc, puisque PQKO, QRKO sont des figures semblables, et OP, OQ des lignes correspondantes, OQ, OR sont aussi des lignes correspondantes; donc

$$OP : OQ = OQ : OR,$$

et OP, OQ, OR sont en progression géométrique; mais ce sont trois lignes quelconques ayant leurs angles vecteurs en progression arithmétique; donc, etc.

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Si trois points ont leurs angles vecteurs en progression arithmétique, les logarithmes des rapports de leurs rayons polaires au premier rayon sont aussi en progression arithmétique.

Corollaire II. — Si l'on prend une série de points dont les angles vecteurs soient des multiples d'un angle donné, les logarithmes des rapports de leurs rayons au premier rayon sont les mêmes multiples du logarithme du rapport du rayon correspondant à l'angle vecteur donné au premier rayon.

Corollaire III. — Si l'on prend une série de points dont les angles vecteurs soient *commensurables*, ces angles varieront comme les logarithmes des rapports des rayons vecteurs correspondants au premier rayon.

Observation. — Par la réduction *à l'absurde*, ceci peut aisément s'étendre au cas où les angles sont *incommensurables*; donc le théorème est général :

Le logarithme du rapport du rayon vecteur en un *certain point de la spirale équiangle au premier rayon varie comme l'angle vecteur.*

Ou, si OA est le premier rayon, OP un autre rayon,

$$\log \frac{OP}{OA} = \mu . \widehat{POA}.$$

Déterminer μ. — Puisque μ a la même valeur où que l'on prenne P, l'équation ci-dessus subsistera quand P approchera indéfiniment de A. Mais, dans ce cas,

$$\log \frac{OP}{OA} = \log \left(1 - \frac{AP \cos \alpha}{OA} \right) = - \frac{AP \cos \alpha}{OA} \text{ à la limite,}$$

et

$$\widehat{POA} = \frac{PA \sin \alpha}{OA} \text{ à la limite;}$$

d'où

$$- \frac{AP \cos \alpha}{OA} = \mu \frac{AP \sin \alpha}{OA},$$

$$\mu = - \cot \alpha;$$

d'où, P étant un point quelconque de la courbe,

$$\log \frac{OP}{OA} = - \cot \alpha . \widehat{POA},$$

ou bien, avec la notation de la géométrie analytique,

$$\log \frac{r}{a} = - \theta \cot \alpha.$$

Si nous mesurons θ dans la direction de r *croissant*, ceci devient

$$\log \frac{r}{a} = \theta \cot \alpha,$$

ou

$$r = a \varepsilon^{\theta \cot \alpha} :$$

c'est l'équation usuelle de la spirale.

W....