Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 560-563

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__560_1>

QUESTIONS.

963. 1° Écrire les n premiers nombres entiers 1, 2, 3,..., n, sur une même ligne, de telle sorte que la différence entre deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à celle de leurs rangs sur cette ligne;

2° Combien le problème admet-il de solutions?

Sur un échiquier composé de n^2 cases, placer n reines de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise par l'une des $(n-1)$ autres est la même question posée en d'autres termes. (LIONNET.)

964. Par un point M d'une ellipse, on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle qui a son pied en M. Sur chacune de ces normales, on porte, à partir du point M, une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et l'ellipse, les trois points ainsi obtenus sont situés sur un cercle qui touche l'ellipse au point M. (LAGUERRE.)

965. Étant donnés deux points fixes A et B situés sur une ellipse; si l'on joint un point quelconque M de cette courbe aux deux point fixes, les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes MA et MB interceptent sur chacun des axes un segment dont la longueur est constante, quelle que soit la position du point sur la courbe. (LAGUERRE.)

966. Si l'on désigne par C_m^p le nombre des combinaisons sans répétition de m objets p à p, en regardant C_m^o comme égal à l'unité, on a l'identité suivante

$$C_k^0 C_{n+1}^{2k+1} + C_{k+1}^1 C_{n+1}^{2k+3} + C_{k+2}^2 C_{n+1}^{2k+5} + \ldots = 2^{n-2k} C_{n-k}^k.$$

(Désiré André).

967. Théorème. a étant un nombre entier positif quelconque, si l'on désigne par S_n la somme des résultats que fournit l'expression

$$[t_1(a-1)][t_2(a-1)-1][t_3(a-1)-2]\ldots[t_n(a-1)-(n-1)]$$

lorsqu'on y remplace $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à p, avec cette restriction que l'on ait toujours

$$t_{k+1} \geqq t_k$$

et

$$t_k(a-1) > k-1,$$

alors on a l'identité suivante

$$\frac{S_1}{p+1} + \frac{S_2}{(p+1)(p+2)} + \frac{S_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots$$
$$+ \frac{S_{(a-1)p}}{(p+1)(p+2)\ldots(ap)} = \left(\frac{2^a-1}{a}\right)^p - 1.$$

(Désiré André.)

968. Si l'on désigne par n un nombre entier positif, et par D_n la différence des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $x^2+px+q=0$, on aura, à partir de $n=2$,

$$D_n = (-1)^{n-1}\left[p^{n-1} - \frac{n-2}{1}p^{n-3}q + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}p^{n-5}q^2 - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}p^{n-7}q^3 + \ldots\right] \times D_1;$$

le développement s'arrête, pour une valeur particulière de n au dernier terme qui ne s'évanouit pas.

(G.-P.-W. BAEHR.)

969. Déduire de la formule précédente la relation

$$n = 2^{n-1} - \frac{n-2}{1}\,2^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,2^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\,2^{n-7} + \ldots$$

(G.-P.-W. BAEHR.)

970. Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés correspondants. Trouver le lieu des sommets de ce triangle. (F. V.)

971. Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(H. BROCARD.)

972. Reconnaître les différentes surfaces représentées par l'équation

$$a\,\frac{y+z}{x} + b\,\frac{x+z}{y} + 1 = 0,$$

quand a et b prennent toutes les valeurs possibles.

Trouver le lieu des centres de ces diverses surfaces.

Indiquer les particularités relatives aux axes des coordonnées aux sections planes.

Peut-il y avoir des sections circulaires?

Les surfaces en question peuvent-elles être de révolution?

Montrer que leur enveloppe est une surface du second ordre, lorsque le produit ab reste constant.

(H. BROCARD.)

973. Une parabole se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe en un point déterminé. On de-

mande : 1° le lieu du foyer ; 2° le lieu du point de la courbe où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe; 3° l'enveloppe de l'axe de la parabole.

(H. Brocard.)

974. On donne une courbe gauche résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant mêmes plans de symétrie ; par deux points pris sur cette courbe on mène les plans normaux. Les milieux des trois segments, interceptés sur chacun des axes de symétrie entre les deux plans normaux et le point milieu de la corde qui joint les deux points de la courbe, sont dans un même plan, et ce plan est perpendiculaire à la corde.

(Laguerre.)

975. Étant donnés une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver sur cette surface un réseau de courbes conjuguées (c'est-à-dire telles, que les tangentes à ces courbes en un point soient conjuguées relativement à l'indicatrice) se projetant sur le plan suivant un réseau orthogonal. (Ribeaucour.)

976. Étant donnés sur un plan deux cercles et un point, mener par le point une sécante telle, que ses parties intérieures aux deux cercles soient entre elles dans un rapport donné. (Construction géométrique de la sécante.)

977. On donne une parabole et un point intérieur à cette courbe ; faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole. (Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence.)