Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 533-557

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__533_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 951

(voir 2e série, t VIII, p 336),

PAR M. J. CHATELAIN,

Professeur au collége d'Altkirch.

Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

(LAISANT.) (*)

La relation connue

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

(*) *Voir*, à l'article CORRESPONDANCE, le n° 1.

donne

$$\frac{1}{2\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

En remplaçant successivement dans cette dernière égalité x par $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \ldots, \frac{x}{2^{n-1}}$, on a

$$\frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{x}{2^2}} - \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2},$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{x}{2^3}} - \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}.$$

Ces n relations donnent

$$\frac{1}{2^n\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{\operatorname{tang} x}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}.$$

Or la limite de $\frac{1}{2^n\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}}$ est $\frac{1}{x}$; en effet,

$$\frac{1}{2^n\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{x} \times \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \times \cos\frac{x}{2^n};$$

et pour $n = \infty$, le second membre de cette dernière égalité se réduit à $\frac{1}{x}$. On a donc

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \lim\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots\right).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Manuel de Cordoba, élève de l'Université de Madrid, et par M. Realis.

Question 907

(voir 2e série, t. VIII, p. 46);

PAR M. WILLIÈRE.

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O *est le centre commun. Par un point quelconque* P *de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux normales à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole. Soient* H *et* K *les points où ces droites coupent l'hyperbole. Par les trois points* P, H *et* K, *on fait passer un cercle, et sur ce cercle on prend le point* P', *conjugué harmonique du point* P *relativement aux deux points* H *et* K : *démontrer que la perpendiculaire élevée sur le milieu de* PP' *est la polaire du point* P *relativement à l'ellipse.* (LAGUERRE.)

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

les équations des deux coniques homofocales; en remarquant que $a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2 = c^2$, on trouve facilement, pour les points d'intersection,

$$x = \pm \frac{aa'}{c}, \quad y = \pm \frac{bb'}{c}.$$

Les deux coniques étant homofocales, les normales à l'ellipse en ces points sont tangentes à l'hyperbole, et deux de ces tangentes non parallèles auront pour équations

$$\frac{ax}{a'c} - \frac{by}{b'c} = 1,$$

$$\frac{ax}{a'c} + \frac{by}{b'c} = 1.$$

Soient

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0,$$

les équations des droites PH, PK parallèles aux normales; en les multipliant, il vient

$$\alpha\alpha' x^2 + \beta\beta' y^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) xy + \ldots = 0.$$

Or

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{ab'}{a'b}, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{ab'}{a'b};$$

d'où

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta = 0, \quad \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} = -\frac{a^2 b'^2}{a'^2 b^2}.$$

Cela posé, si $y = mx + n$ représente la corde HK, l'équation du couple de droites PH et PK sera

$$\left(\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1\right)(y' - mx' - n)$$
$$= 2\left(\frac{xx'}{a'^2} - \frac{yy'}{b'^2} - 1\right)(y - mx - n),$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2}(y'+mx'-n)+\frac{y^2}{b'^2}(y'+mx'+n)$$
$$-2xy\left(\frac{x'}{a'^2}+\frac{my'}{b'^2}\right)+\ldots=0.$$

Par ce qui précède, on doit donc avoir

$$\frac{x'}{a'^2}+\frac{my'}{b'^2}=0,\quad \frac{y'+mx'-n}{y'+mx'+n}=-\frac{a^2}{b^2};$$

d'où l'on tire

$$m=-\frac{b'^2x'}{a'^2y'},\quad n=\frac{b'^2(a^2+b^2)}{c^2y'},$$

et l'équation de la droite HK devient

$$y+\frac{b'^2x'}{a'^2y'}x-\frac{b'^2(a^2+b^2)}{c^2y'}=0.$$

Cherchons maintenant l'équation du cercle passant par les trois points P, H, K. Je dis que ce cercle sera tangent à l'hyperbole en P (*). En effet, toute conique passant par les points P, H, K, et tangente à l'hyperbole en P, a pour équation

$$\mathrm{K}\left(\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-1\right)$$
$$-\left[y+\frac{b'^2x'}{a'^2y'}x-\frac{b'^2(a^2+b^2)}{c^2y'}\right]\left(\frac{xx'}{a'^2}-\frac{yy'}{b'^2}-1\right)=0.$$

Or le terme en xy disparaît de lui-même; il suffit donc de déterminer K de manière que les coefficients de x^2 et

(*) En général, si par un point P d'une conique on mène deux cordes PH, PK parallèles à des tangentes qui se coupent en un point d'un axe de la courbe, la circonférence qui passe par les trois points P, H, K est tangente à la conique au point P. C'est là une conséquence très-simple du théorème de Newton sur les rectangles des segments de cordes d'une courbe du second degré. (G.)

de y^2 soient égaux, ce qui donne la condition

$$\frac{K}{a'^2} - \frac{b'^2 x'^2}{a'^4 y'} = -\frac{K}{b'^2} + \frac{y'}{b'^2};$$

d'où

$$K = \frac{a'^4 y'^2 + b'^4 x'^2}{a'^2 c^2 y'},$$

et l'équation du cercle devient, toute réduction faite,

$$x^2 + y^2 - 2x\frac{a^2 x'}{a'^2} + 2y\frac{b^2 y'}{b'^2}$$
$$+ \frac{a'^4 y'^2 + b'^4 x'^2 + a'^2 b'^2 (a^2 + b^2)}{a'^2 b'^2} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x_0 = \frac{a^2 x'}{a'^2}, \quad y_0 = -\frac{b^2 y'}{b'^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans la polaire du point P relativement à l'ellipse, donnent l'identité

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Il reste donc à prouver que cette polaire est perpendiculaire sur PP'. Or, les droites PH, PK, la tangente au cercle ou à l'hyperbole en P et la perpendiculaire sur la polaire de P forment un faisceau harmonique, car les équations de ces quatre droites sont respectivement

$$y - y' = \frac{ab'}{a'b}(x - x'),$$

$$y - y' = -\frac{ab'}{a'b}(x - x'),$$

$$y - y' = \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}(x - x'),$$

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

Le théorème est donc démontré.

Quand le point P se déplace sur l'hyperbole, le centre du cercle PHK décrit l'hyperbole

$$\frac{a'^2x^2}{a^4} - \frac{b'^2y^2}{b^4} = 1,$$

et la droite HK enveloppe l'hyperbole représentée par

$$C^4(a'^2y^2 - b'^2x^2) = a'^2b'^2(a^2 + b^2)^2.$$

Questions 915 *et* 916

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 48 et 95);

PAR M. E. KRUSCHWITZ,

Membre de la Société des Étudiants en Mathématiques.

915. *Étant donné un polygone* $A_1 A_2 \ldots A_n$, *déterminer la position d'un point* $A_0(x_0, y_0)$ *dont les coordonnées satisfont aux équations*

$$y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 - \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.2}y_{n-2} \mp ny_{n-1} \pm y_n = 0,$$

$$x_0 - nx_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 - \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \mp nx_{n-1} \pm x_n = 0.$$

Démontrer, par le calcul et la géométrie, que la position de ce point est indépendante du choix des axes de coordonnées. (A. SARTIAUX.)

1. Quand nous transformons les axes de coordonnées d'une manière quelconque, les nouvelles coordonnées s'obtiennent par des équations de cette forme

$$x' = px + qy + \alpha, \quad y' = rx + sy + \beta.$$

Après la transformation, les équations données deviennent

$$y'_0 - ny'_1 + \ldots \mp ny'_{n-1} \pm y'_n = 0,$$

$$x'_0 - nx'_1 + \ldots \mp nx'_{n-1} \pm x'_n = 0.$$

Si la position du point déterminé par x'_0, y'_0 doit être la même que celle du point (x_0, y_0), il faut que les dernières équations soient satisfaites par les valeurs de x' et y' mentionnées ci-dessus. En les introduisant, nous obtenons

$$\begin{aligned} &rx_0 + sy_0 + \beta - n(rx_1 + sy_1 + \beta) + \ldots \\ &\quad \mp n(rx_{n-1} + sy_{n-1} + \beta) \pm (rx_n + sy_n + \beta) = 0, \end{aligned}$$

et

$$px_0 + qy_0 + \alpha - n(px_1 + qy_1 + \alpha) + \ldots \pm (px_n + qy_n + \alpha) = 0;$$

ou

$$\begin{aligned} &r\left[x_0 - nx_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 - \ldots \mp nx_{n-1} \pm x_n\right] \\ &+ s\left[y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 - \ldots \mp ny_{n-1} \pm y_n\right] \\ &+ \beta\left[1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \mp n \pm 1\right] = 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &p(x_0 - nx_1 + \ldots \pm x_n) + q(y_0 - ny_1 + \ldots \pm y_n) \\ &\quad + \alpha\left[1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} \ldots \mp n \pm 1\right] = 0. \end{aligned}$$

Pour que, dans ces deux dernières équations, les premiers membres égalent zéro, il suffit, d'après les équations données, de démontrer que

$$\left[1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \mp n \pm 1\right] = 0.$$

Quand nous posons $x = -1$ dans la formule du binôme

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n,$$

nous obtenons

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \pm n \mp 1.$$

Par conséquent aussi, les premiers membres de nos équations égalent zéro. C. Q. F. D.

2. Nous avons deux systèmes de coordonnées quelconques, et nous déterminons d'abord les points M_1 et M'_1 correspondant aux coordonnées nx_1, ny_1 dans les deux systèmes. La droite $M_1M'_1$ sera parallèle à OO', et si $OO' = t$, elle sera égale à $t(-1+n)$. Continuons, en déterminant les points M_2 et M'_2 correspondant aux coordonnées $nx_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x_2$, $ny_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}y_2$, dans les deux systèmes, la droite $M_2M'_2$ sera encore parallèle à OO' et égale à

$$\left[-1+n-\frac{n(n-1)}{1.2}\right]t,$$

et ainsi de suite. La droite $M_nM'_n$ sera égale à

$$\left[-1+n-\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\pm n\mp 1\right]t,$$

c'est-à-dire $=0$, comme nous l'avons démontré plus haut.

Puisque la distance de M_n et M'_n, dont les coordonnées sont

$$x_0 = nx_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 + \ldots \pm nx_{n-1} \mp x_n,$$

$$y_0 = ny_1 - \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 + \ldots \pm ny_{n-1} \mp y_n,$$

égale zéro, les points coïncident. C. Q. F. D.

916. *Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques à aire constante dont les axes ont la même direction.*

(C. HARKEMA.)

L'équation de l'ellipse est

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

où

$$ab\pi = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad ab = \mathrm{P}.$$

En éliminant b, nous avons

$$\mathrm{P}^2x^2 + a^4y^2 - a^2\mathrm{P}^2 = 0.$$

Pour trouver l'enveloppe, nous différentions l'équation par rapport à a, et nous éliminons a entre les deux équations. Il en résnlte

$$2a^2y^2 - \mathrm{P}^2 = 0;$$

d'où

$$a^2 = \frac{\mathrm{P}^2}{2y^2}.$$

Donc

$$\mathrm{P}^2x^2 + \frac{\mathrm{P}^4}{4y^2} - \frac{\mathrm{P}^4}{2y^2} = 0,$$

$$x^2y^2 = \frac{\mathrm{P}^2}{4}.$$

La courbe est composée de deux hyperboles équilatères, dont les axes de coordonnées sont les asymptotes.

Question 922

(voir 2e série, t. VIII, p. 96),

PAR M. SCHLEGEL.
Étudiant en mathématiques à Berlin.

Un ellipsoïde donné tourne autour d'un point fixe donné sur l'un de ses axes de symétrie, trouver le lieu des pôles d'un plan fixe donné, par rapport aux diverses positions de l'ellipsoïde. (LAFONT.)

La solution de la question proposée ne devient pas plus difficile, si l'on suppose que le point fixe donné soit situé comme on voudra. Il est évident qu'on peut prendre l'ellipsoïde fixe et faire tourner le plan en restant toujours à la même distance du point donné. Soit l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Alors le plan polaire du point (ξ, η, ζ) aura pour équation

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1.$$

La distance constante p de ce plan au point fixe (x_1, y_1, z_1) sera donc

$$p=\frac{\frac{x_1\xi}{a^2}+\frac{y_1\eta}{b^2}+\frac{z_1\zeta}{c^2}-1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4}}}.$$

Le lieu cherché sera donc une surface du second ordre, dont l'équation sera

$$p^2\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_1\xi}{a^2}+\frac{y_1\eta}{b^2}+\frac{z_1\zeta}{c^2}-1\right)^2. \tag{2}$$

En égalant à zéro deux des trois données x_1, y_1, z_1, on aura la solution de la question proposée.

En prenant le centre pour le point (x_1, y_1, z_1), l'équation de la surface sera

$$p^2\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4}\right)=1.$$

La courbe d'intersection de cet ellipsoïde et de l'ellipsoïde (1) joue un rôle important dans la mécanique. (*Voir* Poinsot, *Sur la rotation d'un corps.*)

Question 939

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. FOURET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Étant donné un contour polygonal formé de 2 *n côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair.* (CHASLES.)

Soient $A_1 A_2 \ldots A_{2n-1} A_{2n}$ un polygone inscrit dans une conique; O et M, deux points pris arbitrairement sur cette courbe, le premier fixe, le second mobile.

A_{2p-1}, A_{2p}, A_{2p+1} étant trois sommets consécutifs du polygone, on a (CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 3) :

$$\frac{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}}{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}} : \frac{\sin \widehat{OMA_{2p-1}}}{\sin \widehat{OMA_{2p+1}}} = \text{const.}$$

Désignons par Π_1^n le produit des n rapports anharmoniques obtenus, en faisant successivement dans le précédent p égal à 1, 2, ..., n, et en observant que A_{2p+1} n'est autre chose que A_1,

$$\Pi_1^n \left(\frac{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}}{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}} : \frac{\sin \widehat{OMA_{2p-1}}}{\sin \widehat{OMA_{2p+1}}} \right) = K,$$

K étant une constante ;

Ou, plus simplement,

$$\Pi_1^n \left(\frac{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p-1}}}{\sin \widehat{A_{2p} M A_{2p+1}}} \right) = K,$$

ou bien encore

$$(1)\qquad \frac{\Pi_1^n\left(\sin \widehat{A_{2p}MA_{2p-1}}\right)}{\Pi_1^n\left(\sin \widehat{A_{2p}MA_{2p+1}}\right)} = K.$$

Cette égalité exprime un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donné un contour polygonal formé de $2n$ *côtés inscrit dans une conique, le produit des sinus des angles sous lesquels on voit d'un point quelconque de la conique tous les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des sinus des angles sous lesquels on voit du même point les côtés de rang impair.*

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad \frac{\Pi_1^n\left(MA_{2p}\times MA_{2p-1}\sin \widehat{A_{2p}MA_{2p-1}}\right)}{\Pi_1^n\left(MA_{2p}\times MA_{2p+1}\sin \widehat{A_{2p}MA_{2p+1}}\right)} = K.$$

Or, MQ_{2p}, MQ_{2p+1} désignant les distances du point M aux droites $A_{2p}A_{2p-1}$, $A_{2p}A_{2p+1}$, on a

$$MA_{2p}\times MA_{2p-1}\sin \widehat{A_{2p}MA_{2p-1}} = A_{2p}A_{2p-1}\times MQ_{2p},$$

car les deux membres de cette égalité sont deux expressions différentes de l'aire du triangle $A_{2p}MA_{2p-1}$.

Pour la même raison

$$MA_{2p}\times MA_{2p+1}\sin \widehat{A_{2p}MA_{2p+1}} = A_{2p}A_{2p+1}\times MQ_{2p+1}.$$

En ayant égard à ces relations, l'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{\Pi_1^n(MQ_{2p})}{\Pi_1^n(MQ_{2p+1})} = \text{const.}$$

C'est l'expression du théorème que nous nous proposions de démontrer.

Remarque. — Ce théorème n'est que la généralisation du théorème de Pappus relatif au quadrilatère inscrit dans une conique (Chasles, *Traité des coniques*, p. 16). On peut en déduire une généralisation du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit.

Imaginons un polygone de $2n$ côtés inscrit dans une conique, et désignons par

$$(3)\qquad A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0,\ldots$$

les équations de n côtés non consécutifs, par

$$(4)\qquad P = 0,\quad Q = 0,\quad R = 0,\ldots$$

les équations des n autres.

L'équation

$$(5)\qquad ABC\ldots + \lambda PQR\ldots = 0$$

représente une courbe d'ordre n passant par les n^2 points d'intersection des droites (3) par les droites (4); elle exprime d'ailleurs que le produit des distances d'un point quelconque de cette courbe aux droites (3) est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux droites (4). Or les points de la conique, d'après le théorème que nous avons démontré précédemment, jouissent de la même propriété; la conique, pour une valeur convenable de λ, fait donc partie de la courbe (5). La partie complémentaire est une courbe d'ordre $n - 2$, contenant les $n(n - 2)$ points d'intersection des droites (4) par les droites (5), sans comprendre parmi ces points les sommets du polygone.

Comme d'ailleurs $n(n - 2)$ est supérieur au nombre des conditions qui déterminent une courbe d'ordre $(n-2)$, le résultat auquel nous sommes arrivés constitue un théorème qui peut s'énoncer ainsi:

Étant donné un polygone fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, les points d'intersection des côtés de *rang pair avec les côtés de rang impair non contigus sont situés sur une même courbe d'ordre $n - 2$.*

Dans le cas de $n = 3$, qui est le plus simple, on retrouve le théorème de Pascal.

Question 939

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. WILLIÈRE.

Étant donné un contour polygonal fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair. (CHASLES.)

On peut toujours décomposer le polygone en $n - 1$ quadrilatères, les quadrilatères extrêmes ayant trois côtés du contour polygonal, et les quadrilatères moyens deux seulement. Cela étant, soient

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{2n}$$

les perpendiculaires abaissées d'un point de la conique sur les côtés du polygone, et

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \ldots,\ \delta_{n-2}$$

les perpendiculaires abaissées sur les $n - 2$ diagonales. On aura dans chacun des quadrilatères

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \delta_1} = \text{const.},$$

$$\frac{\delta_1 \delta_2}{\alpha_4 \alpha_{2n}} = \text{const.},$$

$$\frac{\alpha_5 \alpha_{2n-1}}{\delta_2 \delta_3} = \text{const.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\alpha_{n+1} \alpha_{n+3}}{\alpha_{n+2} \delta_{n-2}} = \text{const.}$$

Donc on en déduira toujours, quel que soit n,

$$\frac{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{2n-1}}{\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{2n}} = \text{const.}$$

Question 943

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 276);

PAR M. LÉON GEOFFROY,
Ingénieur, Professeur de Mathématiques.

Une courbe plane, c, roule sur une courbe fixe C, *située dans le même plan, en entraînant un point mobile qui décrit alors une courbe b. A un instant donné, les deux courbes se touchent en* A, *et, le point mobile étant en* M, *la courbe c s'arrête brusquement, et la courbe* C *commence au contraire à rouler sur la première en entraînant le point* M *suivant une courbe* B. *Démontrer que les centres de courbure des deux courbes b et* B, *au point commun* M, *divisent harmoniquement la longueur* MA.

(LAISANT.)

Si l'on désigne par R le rayon de courbure de la courbe fixe C et par R′ celui de la courbe mobile c au point A; par n la longueur MA, par ρ le rayon de courbure de la courbe b au point M, on a, d'après Savary,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{n}\right),$$

φ étant l'angle que fait la normale en M à la courbe b avec la normale en A aux courbes c et C.

Quand la courbe c devient fixe et C mobile, la courbe B décrite par le point M a pour rayon de courbure ρ_1, et la formule ci-dessus devient, en tenant compte des changements de signe,

$$-\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho_1 - n} + \frac{1}{n}\right),$$

ou bien

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\cos\varphi\left(\frac{1}{n-\rho_1}-\frac{1}{n}\right).$$

Soient X le centre de courbure de b, et X′ le centre de courbure de B (*).

Des deux relations écrites, on déduit l'égalité

$$\frac{1}{\rho-n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n-\rho_1}-\frac{1}{n},$$

ou bien

$$\frac{1}{AX}+\frac{1}{MA}=\frac{1}{X'A}-\frac{1}{MA};$$

d'où

$$\frac{1}{AX}+\frac{2}{MA}=\frac{1}{X'A},$$

$$MA.X'A+2AX.X'A.=AX.MA,$$

$$X'A(MA+AX)+AX(X'A-MA)=0,$$

$$X'A.MX+AX(-MX')=0,$$

ou

$$X'A.MX+AX.X'M=0,$$

$$\frac{X'A}{X'M}=-\frac{AX}{MX}=-\frac{XA}{XM},$$

ou, sous la forme ordinaire,

$$\frac{X'A}{X'M}:\frac{XA}{XM}=-1.$$

Question 895

(voir 2e série, t. VII, p 537),

Par M. FARINEAU,

Élève au lycée de Lille.

Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'aire constante circonscrite à un triangle. (Sylvester.)

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Je prends pour origine un des sommets, O, du triangle; pour axes de coordonnées les deux côtés adjacents. Soient 2α, 2β leurs longueurs; θ l'angle des axes.

L'équation de l'ellipse sera

$$x(x-2\alpha)+Cy(y-2\beta)+2Bxy=0;$$

elle renferme deux paramètres B et C.

Or l'aire de l'ellipse

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

est

$$E=\frac{\Pi\Delta\sin\theta}{(ac-b^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \Delta=acf+2ebd-ae^2-cd^2-fb^2;$$

l'aire de l'ellipse proposée sera donc

$$E=\frac{\pi C(2B\alpha\beta-c\beta^2-\alpha^2)\sin\theta}{(C-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit a le rayon du cercle dont la surface est E, on aura

$$(1)\qquad \frac{a^2}{\sin\theta}=\frac{C(2B\alpha\beta-C\beta^2-\alpha^2)}{(C-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les coordonnées du centre de l'ellipse sont données par les équations

$$f'_x=0$$

ou

$$(2)\qquad x-\alpha+By=0,$$

$$f'_y=0$$

ou

$$(3)\qquad C(y-\beta)+Bx=0.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant B et C entre (1), (2) et (3). Je résous (2) et (3) par rapport à B et

C, ce qui donne

$$B = \frac{\alpha - x}{y}, \quad C = \frac{x(\alpha - x)}{y(\beta - y)}.$$

Je substitue dans (1), ce qui donne

$$\frac{a^4}{\sin^2\theta}\left[\frac{x(\alpha - x)}{y(\beta - y)} - \frac{(\alpha - x)^2}{y^2}\right]^3$$
$$= \frac{x^2(\alpha - x)^2}{y^2(\beta - y)^2}\left[\frac{2\alpha\beta(\alpha - x)}{y} - \frac{\beta^2 x(\alpha - x)}{y(\beta - y)} - \alpha^2\right]^2,$$

équation qui donne

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha - x)^2 = 0,\\ (\beta - y)^2 = 0,\\ (\alpha y + \beta x - \alpha\beta)^2 = 0,\end{array}\right\}$$ équations des droites qui joignent les milieux des côtés des triangles;

et

$$\text{(A)} \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 y^2(\alpha y + \beta x - 2\alpha\beta)^2 \sin^2\theta \\ \quad - a^4(\alpha - x)(\beta - y)(\alpha y + \beta x - \alpha\beta) = 0. \end{array}\right.$$

Telle est l'équation du lieu; elle est du sixième degré.

Si l'on fait $x = \alpha$, on trouve

$$y^2 = 0 \quad \text{et} \quad (y - \beta)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que les milieux des côtés du triangle sont trois points doubles.

On voit sur l'équation (A) que les directions asymptotiques sont parallèles aux trois côtés du triangle. Je cherche l'ordonnée à l'origine α de l'asymptote parallèle à la droite

$$\alpha y + \beta x = 0;$$

je trouve

$$(\alpha - \beta)^2 = 0.$$

C'est une des droites qui joignent les milieux des côtés du triangle; de même les deux autres sont des asymptotes.

Je dis que les branches infinies correspondant à ces asymptotes sont imaginaires.

Je désigne par a, b, o les milieux des côtés du triangle OAB, et je considère les droites $CabC'$, $EoaE'$, $DobD'$ (*). Je remarque qu'il n'y a pas de points du lieu dans la partie $EobC'$. En effet, pour un point de cette portion, on a $x - \alpha > 0$, $y - \beta < 0$, et

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta > 0;$$

donc l'équation du lieu est impossible. On verrait de même que les portions $DoaC$ et $E'abD'$ ne renferment pas non plus de points du lieu, et la courbe ne peut être située que dans le triangle aob et dans les angles DoE, CaE' et $D'bC'$.

Cela posé, si la droite ab était asymptote, les deux branches infinies devraient être du même côté de cette droite; mais alors ab rencontrerait la courbe en trois points à l'infini, plus en quatre points, deux en a, deux en b, ce qui fait sept; et cela est impossible, car l'équation est du sixième degré. Ainsi la courbe n'a pas de branches infinies.

Cela posé, je cherche les tangentes au point o; je transporte l'origine en ce point. L'équation devient

$$(x+\alpha)^2(y+\beta)^2(\alpha y+\beta x)^2\sin^2\theta - a^4xy(\alpha y+\beta x+\alpha\beta) = 0;$$

les tangentes à l'origine sont représentées par l'équation

$$\alpha\beta\sin^2\theta(\alpha y+\beta x)^2 - a^4xy = 0.$$

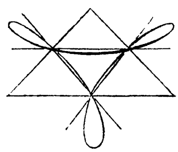
Ces tangentes seront réelles si on a

$$a^2 > 2\alpha\beta\sin\theta.$$

$2\alpha\beta\sin\theta$ est la surface du triangle donné, a^2 celle du

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

carré qui a pour côté le rayon du cercle dont la surface est égale à celle de l'ellipse, et cette condition exprime que la surface de ce carré est supérieure à celle du triangle. La courbe aura donc, dans ce cas, la forme indiquée.



Je suppose que les tangentes soient confondues, c'est-à-dire que

$$a^2 = 2\alpha\beta \sin\theta.$$

Alors les points o, a, b sont des points de rebroussement; les trois feuilles de la courbe précédente disparaissent, et la courbe est tout entière dans le triangle aob. La droite avec laquelle se confondent les tangentes en o est

$$-\alpha y + \beta x = 0.$$

C'est la droite Oo. De même Aa, Bb sont les tangentes aux points a et b.

Si maintenant a^2 devient $< 2\alpha\beta \sin\theta$, les points a, o, b sont alors des points isolés. Je cherche l'intersection de la courbe avec la droite Oo, pour voir comment elle est située.

Je fais $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ dans l'équation (A), et il vient, en faisant abstraction du facteur $(x-\alpha)^2 = 0$,

$$f(x) = 4\beta^2 \sin^2\theta\, x^4 - 2a^4\alpha x + a^4\alpha^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines positives, ou ses quatre racines sont imaginaires.

Si $a^2 > 2\alpha\beta \sin\theta$, ses deux racines réelles sont comprises, l'une entre $\frac{\alpha}{2}$ et α, l'autre est supérieure à α. Si $a^2 = 2\alpha\beta\sin\theta$, la racine supérieure devient égale à α : c'est le cas précédent; l'autre racine est toujours comprise entre $\frac{\alpha}{2}$ et α. Soit γ la racine de la dérivée

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2\sin^2\theta}},$$

l'équation $f(x) = 0$ aura des racines réelles si

$$f(\gamma) < 0 \quad \text{ou} \quad a^4 > \frac{64}{27}\alpha^2\beta^2\sin^2\theta.$$

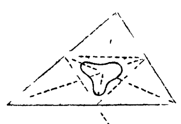
On voit que cette condition a lieu quand

$$a^4 > 4\alpha^2\beta^2\sin^2\theta,$$

c'est-à-dire pour le premier cas examiné; de même pour

$$a^4 = 4\alpha^2\beta^2\sin^2\theta.$$

Si $a^4 < 4\alpha^2\beta^2\sin^2\theta$, la condition précédente peut être encore satisfaite. Alors la courbe aura la forme ci-contre:



Enfin, si $a^4 = \frac{64}{27}\alpha^2\beta^2\sin^2\theta$, la courbe se réduit à un point

$$x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2\sin^2\theta}};$$

a diminuant à partir de cette valeur, le lieu est imaginaire. Ainsi la valeur minimum de a est telle que

$$a^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\,\alpha\beta \sin\theta.$$

Donc l'ellipse de surface minimum circonscrite au triangle OAB a pour surface

$$\frac{8\pi\alpha\beta \sin\theta}{3\sqrt{3}}.$$

Sur les questions 894 *et* 961

(p. 312 et 528);

PAR M. LE BESGUE.

La question 894 généralisée est celle-ci : Couper un prisme droit de base donnée, de manière que la section soit un triangle de côtés αx, βx, γx semblable au triangle de côtés α, β, γ. La base du prisme étant un triangle de côtés a, b, c, on suppose que a, b, c sont respectivement les projections de αx, βx, γx. L'équation est

$$(1) \qquad \sqrt{\alpha^2 x^2 - a^2} + \sqrt{\beta^2 x^2 - b^2} + \sqrt{\gamma^2 x^2 - c^2} = 0,$$

en déterminant convenablement les signes des radicaux.

Cette équation en x est biquadratique, on connaît la construction de ses racines.

La question 894 suppose $\alpha x = \beta x = \gamma x = y$, y étant une ligne.

Si l'on met l'équation (1) sous la forme

$$\sqrt{\alpha^2 - \frac{a^2}{x^2}} + \sqrt{\beta^2 - \frac{b^2}{x^2}} + \sqrt{\gamma^2 - \frac{c^2}{x^2}},$$

et si l'on fait

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{x^2} = \frac{c^2}{x^2} = y^2,$$

le triangle dont les côtés sont α, β, γ se projettera suivant un triangle équilatéral de côté y.

Les équations

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - b^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = 0,$$
$$\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{b^2 - y^2} + \sqrt{c^2 - y^2} = 0$$

(en changeant α, β, γ en a, b, c), se réduisent à la même équation

$$3y^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)y^2 + 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0,$$

ou

$$(3y^2 - a^2 - b^2 - c^2)^2 = R,$$

$$(a)\ \begin{cases} R = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 3(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 12 . a^2b^2 \\ \quad = 2(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - c^2)^2 + 2(b^2 - c^2)^2. \end{cases}$$

Mais, comme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, on a aussi

$$(b)\ \begin{cases} R = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 12a^2b^2\sin^2 C \\ \quad = \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}.ab\sin C\right) \\ \quad\quad \times \left(a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{3}.ab\sin C\right). \end{cases}$$

Pour le premier problème, on devra prendre

$$3y^2 - a^2 - b^2 - c^2 = \sqrt{R},$$

et pour le second

$$3y^2 - a^2 - b^2 - c^2 = -\sqrt{R}.$$

En partant de la forme (b) de R, et posant

$$6\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}.ab\sin C,$$
$$6\rho'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\,ab\sin C,$$

on aura

$$y^2 = (\rho \pm \rho')^2, \quad y = (\rho \pm \rho'),$$

puisque l'on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(\rho^2 + \rho'^2), \text{ et } \sqrt{R} = 6\rho\rho'.$$

D'ailleurs, en vertu des égalités

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

on a encore

$$\rho^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cos(C + 60^\circ),$$

$$\rho'^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cos(C - 60^\circ);$$

et comme le rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a}{\sqrt{3}}$, on voit que ρ et ρ' ne sont autres que les droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ de l'énoncé de la question **961**.

On peut demander la construction géométrique du problème plus général, posé plus haut.

Note. — M. H. Brocard, lieutenant du Génie, et M. Jouannc, professeur au lycée de Caen, ont de même resolu, par le calcul, les questions 894 et 961.