

RETSIN

**Démonstrations nouvelles de deux  
théorèmes de géométrie**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 8  
(1869), p. 530-533

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1869\\_2\\_8\\_530\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8_530_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATIONS NOUVELLES DE DEUX THÉORÈMES  
DE GÉOMÉTRIE ;**

**PAR M. RETSIN,**

Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Gand.

---

**I.**

*Les projections, sur les côtés d'un triangle, d'un point quelconque M de la circonférence circonscrite sont situées sur une même droite qui divise en deux parties égales la droite menée du point M au point de concours H des hauteurs du triangle.*

1° Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  (fig. 1) ces trois projections. Prolongeons la droite  $M\alpha$  jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence, et menons la droite ANP.

En vertu des quadrilatères inscriptibles  $M\alpha\beta C, MNAC$ , on a

$$N\alpha\beta = MCA = 180^\circ - MNA.$$

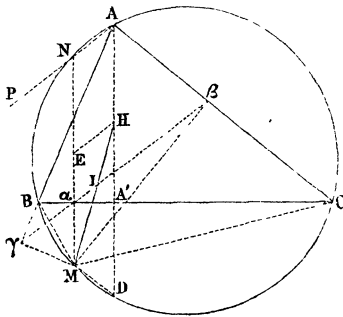
Donc  $\alpha\beta$  est parallèle à la corde AN.

Le quadrilatère inscriptible  $M\alpha B\gamma$  donne

$$M\alpha\gamma = MB\gamma = MNP,$$

car les deux derniers angles ont même mesure. Donc  $\alpha\gamma$  est parallèle à  $AP$ , et les trois points  $\alpha, \beta, \gamma$  se trouvent sur une même droite parallèle à  $AP$ .

Fig. 1.



2° Soit  $D$  le point où la hauteur  $AA'$  rencontre la circonférence circonscrite au triangle. Nous savons que  $A'D = A'H$ , si donc nous prenons  $\alpha E = \alpha M$ , le quadrilatère  $MEHD$  sera un trapèze isocèle, et comme le trapèze  $MNAD$  est lui-même isocèle,  $HE$  est parallèle à  $AN$ , donc aussi à  $\alpha\beta$ . Il résulte de là que la droite  $\alpha\beta$  qui passe par le milieu  $\alpha$  du côté  $ME$ , dans le triangle  $MEH$ , est parallèle à un second côté de ce triangle; elle passe donc par le milieu du troisième côté  $MH$ .

## II.

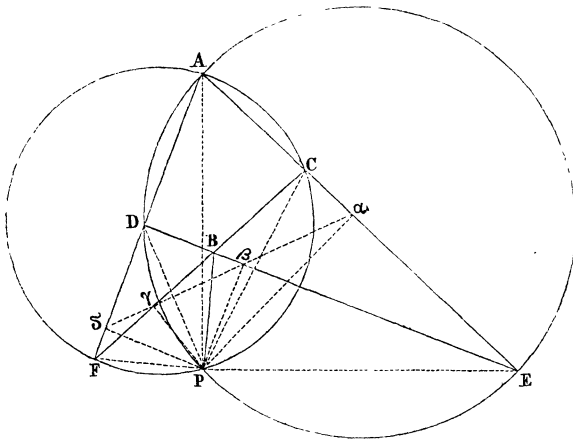
Quatre droites situées dans le même plan forment quatre triangles; dans chacun d'eux existe un point de

rencontre des hauteurs; les quatre points de rencontre sont situés sur une même droite. (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 13, et 1847, p. 196.)

*Lemme.* — Les circonférences de cercle circonscrites à ces quatre triangles passent par un même point.

Soient  $ECA$ ,  $EBD$ ,  $FDA$ ,  $FBC$  (*fig. 2*) les quatre droites et  $P$  le second point d'intersection des circonférences circonscrites aux triangles  $ADE$ ,  $ACF$ .

Fig. 2.



Les quadrilatères inscrits  $ADPE$ ,  $ACPF$  donnent

$$DEP = DAP = FCP$$

et

$$CFP = CAP = EDP;$$

donc les quadrilatères  $BCEP$ ,  $BDFP$  sont inscrits, et les circonférences circonscrites aux triangles  $BCE$ ,  $BDF$  passent aussi par le point  $P$ .

Arrivant au théorème principal, nous remarquons que les projections  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  du point P sur les quatre droites données sont situées sur une même droite, car, prises trois à trois, elles sont les projections du point P sur les côtés des quatre triangles. Cette droite  $\alpha\beta\gamma\delta$  divise en parties égales les quatre droites menées du point P aux points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles; donc ces points de rencontre sont situés sur une même droite parallèle à  $\alpha\beta\gamma\delta$ .