Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 526-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__526_0>

CORRESPONDANCE.

I. *M. E. Lemoine* nous adresse la Note suivante :

A la page 55 (t. I) du *Traité de Calcul différentiel* de *M. Serret,* on lit :

« Il s'agit de savoir dans quel cas la fonction $y = a^x - x$ peut s'annuler, a étant un nombre compris entre 0 et 1 On a

$$\frac{dy}{dx} = a^x \mathrm{L}a - 1,$$

la caractéristique L désignant un logarithme *népérien*.

» On voit que la fonction est décroissante tant qu'on aura

$$a^x < \frac{1}{\mathrm{L}a}, \quad \text{ou} \quad x < \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{\mathrm{L}a}\right)}{\mathrm{L}a}.$$

Elle sera croissante dans le cas contraire. »

Il n'en est pas ainsi. Car : 1° a étant compris entre 0 et 1, La est négatif; donc $\frac{dy}{dx}$ est toujours négatif, et, par suite, y toujours décroissant; 2° $\frac{1}{\mathrm{L}a}$ étant négatif, son logarithme est imaginaire, et l'inégalité

$$x < \frac{\mathrm{L}\left(\frac{1}{\mathrm{L}a}\right)}{\mathrm{L}a}$$

n'a plus de sens.

On voit facilement que y est négatif pour de grandes valeurs positives de x, et qu'il est positif pour des valeurs négatives de x (*), et, puisque y est toujours dé-

(*) La valeur de y est négative pour $x = 1$ et $x > 1$, et positive pour $x = a$ et $x < a$.

croissant, il existe une valeur unique de x pour laquelle y s'annule. Donc, *quand a est compris entre* o *et* 1, *il y a toujours un nombre qui, dans la base a, est égal à son logarithme* (*).

Dans l'hypothèse $a > 1$, on trouve facilement que y ne peut s'annuler qu'autant que l'on a $a < e^{\frac{1}{e}}$, en suivant la marche indiquée par M. Serret.

Note du Rédacteur. — Dans l'hypothèse $a > 1$, on peut distinguer trois cas, suivant qu'on a

$$a < e^{\frac{1}{e}}, \quad a = e^{\frac{1}{e}}, \quad a > e^{\frac{1}{e}}.$$

Dans le premier, l'équation $a^x - x = 0$ a deux racines positives comprises : l'une entre 1 et e; l'autre entre e et $+\infty$.

Si $a = e^{\frac{1}{e}}$, l'équation $a^x - x = 0$ a une racine double égale à la base e du système des logarithmes *népériens*.

Enfin, lorsqu'on a $a > e^{\frac{1}{e}}$, l'équation considérée n'admet aucune solution réelle.

De ce que l'inégalité $\frac{1}{La} > e$ donne à la fois $a > 1$ et $a < e^{\frac{1}{e}}$, on peut conclure que, dans tout système de logarithmes dont le module $\frac{1}{La}$ surpasse le nombre e, il y a deux nombres qui sont égaux à leurs logarithmes.

Si le module $\frac{1}{La}$ est égal à e, le nombre e est le seul, dans le système considéré, qui soit égal à son logarithme.

Enfin, si, la base a étant supposée plus grande que l'unité, le module $\frac{1}{La}$ est moindre que e, aucun nombre du système ne peut être égal à son logarithme. (G.)

(*) Ce nombre est compris entre a et 1.

II. *M. Burtaire*, Maître auxiliaire au lycée de Nancy, nous a adressé une solution de la question 945, semblable à celle de M. Aouit (p. 374, numéro d'août).