NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Propriétés nouvelles des diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 481-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__481_0>

PROPRIÉTÉS NOUVELLES DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE;

PAR GEORGES DOSTOR,
Docteur ès Sciences.

---

1. Considérons les équations

$$(1)\qquad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad\Big|\qquad a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$$

de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leur centre O et à leurs axes; et soient F, F′ leurs foyers. Appelons x, y les coordonnées d'un point M de ces courbes; ρ le rayon central OM qui aboutit au point M; r, r' les rayons vecteurs menés des deux foyers au même point; et 2φ l'angle compris entre ces rayons vecteurs. Désignons, en outre, par $2c$ la distance focale FF′, de sorte que

$$c^2=a^2-b^2. \qquad\Big|\qquad c^2=a^2+b^2.$$

2. Dans le triangle MFF′, la droite MO est la médiane sur le côté FF′; par conséquent, nous avons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\rho^2 &= r^2+r'^2+2rr'\cos 2\varphi,\\ 4c^2 &= r^2+r'^2-2rr'\cos 2\varphi, \end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant $\cos 2\varphi$ par $\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$ et en multipliant $r^2+r'^2$ par $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$,

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} 4\rho^2 &= (r'+r)^2\cos^2\varphi+(r'-r)^2\sin^2\varphi,\\ 4c^2 &= (r'-r)^2\cos^2\varphi+(r'+r)\ \sin^2\varphi, \end{aligned}\right.$$

puis, en observant que

$$r'+r=2a, \qquad\Big|\qquad r'-r=2a,$$

(II)

$$\left\{\begin{aligned} 4\rho^2 &= 4a^2\cos^2\varphi+(r'-r)^2\sin^2\varphi,\\ 4c^2 &= 4a^2\sin^2\varphi+(r'-r)^2\cos^2\varphi. \end{aligned}\right. \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} 4\rho^2 &= 4a^2\sin^2\varphi+(r'+r)^2\cos^2\varphi,\\ 4c^2 &= 4a^2\cos^2\varphi+(r'+r)^2\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

3. On peut donner une autre forme à ces relations. Dans la première des égalités (2), remplaçons $\cos 2\varphi$ d'abord par $1 - 2\sin^2\varphi$, puis par $2\cos^2\varphi - 1$; et, dans la seconde, $\cos 2\varphi$ d'abord par $2\cos^2\varphi - 1$, puis par $1 - 2\sin^2\varphi$: nous obtenons

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \rho^2 = a^2 - rr'\sin^2\varphi, \\ c^2 = a^2 - rr'\cos^2\varphi. \end{cases}$$

$$\rho^2 = a^2 + rr'\cos^2\varphi, \qquad c^2 = a^2 + rr'\sin^2\varphi.$$

4. Ajoutons ces équations, de part et d'autre, membre à membre, nous trouvons

$$\rho^2 + c^2 = 2a^2 - rr'; \qquad \Big| \qquad \rho^2 + c^2 = 2a^2 + rr';$$

en observant que

$$a^2 - c^2 = b^2, \qquad \Big| \qquad a^2 - c^2 = -b^2,$$

on voit que ces relations reviennent à

$$\text{(IV)}\quad \rho^2 = a^2 + b^2 - rr'. \qquad \Big| \qquad \rho^2 = a^2 - b^2 + rr'.$$

Théorème I. — *Dans toute ellipse, le carré d'un rayon central est égal à* la somme *des carrés des demi-axes,* diminuée *du produit des rayons vecteurs qui aboutissent à son extrémité.*

Théorème I. — *Dans toute hyperbole, le carré d'un rayon central est égal à* la différence *des carrés des demi-axes,* augmentée *du produit des rayons vecteurs qui aboutissent à son extrémité.*

5. Les secondes des égalités (III) donnent

(V)

$$\begin{cases} \cos\varphi = \sqrt{\dfrac{a^2 - c^2}{rr'}} = \dfrac{b}{\sqrt{rr'}}, \\[2ex] \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{rr' - b^2}{rr'}} = \sqrt{\dfrac{a^2 - \rho^2}{rr'}}, \\[2ex] \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\sqrt{rr' - b^2}}{b} = \dfrac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{b}, \end{cases}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{rr'}} = \frac{b}{\sqrt{rr'}},$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{rr' - b^2}{rr'}} = \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{rr'}},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{\sqrt{rr' - b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 - a^2}},$$

pour le demi-angle des rayons vecteurs en valeurs de ces rayons, des demi-axes et du rayon central.

6. L'inclinaison F du rayon vecteur FM est le supplément de l'angle en F du triangle MFF'; par conséquent, si nous faisons $r + r' + 2c = 2p$, nous aurons

$$\tang \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{p(p-r')}{(p-2c)(p-r)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} F' = \sqrt{\frac{(p-2c)(p-r')}{p(p-r)}};$$

d'où nous tirons

$$(3) \quad \frac{\tang \frac{1}{2} F}{\tang \frac{1}{2} F'} = \frac{p}{p-2c}, \quad \tang \frac{1}{2} F \tang \frac{1}{2} F' = \frac{p-r'}{p-r}.$$

Suivant que la conique est une ellipse ou une hyperbole, on a

$$r' + r = 2a,$$

$$\frac{p}{p-2c} = \frac{r'+r+2c}{r'+r-2c} = \frac{a+c}{a-c},$$

$$(\mathrm{VI}) \quad \frac{\tang \frac{1}{2} F}{\tang \frac{1}{2} F'} = \frac{a+c}{a-c}.$$

THÉORÈME II. — *Dans toute ellipse,* le quotient *des tangentes des demi-angles que font avec le grand axe les rayons vecteurs d'un point de la courbe est égal au rapport de* la somme *du grand axe et de la distance focale à* leur différence.

$$r' - r = 2a,$$

$$\frac{p-r'}{p-r} = \frac{2c+r-r'}{2c+r'-r} = \frac{c-a}{c+a},$$

$$\tang \frac{1}{2} F \tang \frac{1}{2} F' = \frac{c-a}{c+a}.$$

THÉORÈME II. — *Dans toute hyperbole,* le produit *des tangentes des demi-angles que font avec l'axe transverse les rayons vecteurs d'un point de la courbe est égal au rapport de* la différence *de la distance focale et de l'axe transverse à* leur somme.

7. Admettons que le point M soit situé dans l'angle

des x et y positifs; nous avons

$$x^2+y^2=\rho^2;$$

si nous combinons cette équation successivement avec chacune des équations (1) de nos coniques à centre, nous trouvons, en ayant égard aux relations (IV),

(VII)

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2-b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{a^2-rr'},\\ y &= \frac{b}{c}\sqrt{a^2-\rho^2} = \frac{b}{c}\sqrt{rr'-b^2}.\end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} x &= \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2+b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{a^2+rr'},\\ y &= \frac{b}{c}\sqrt{\rho^2-a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{rr'-b^2}.\end{aligned}$$

Telles sont les coordonnées du point M de l'ellipse et de l'hyperbole en valeur des demi-axes, de la demi-distance focale et du rayon central ou des rayons vecteurs.

Si le point M de la courbe était situé dans l'un des trois autres angles des axes, on prendrait chaque radical avec le signe convenable, $+$ ou $-$.

8. Représentons par $2\rho_1$ le diamètre conjugué de 2ρ dans l'ellipse, ou le diamètre qui, dans l'hyperbole conjuguée

$$(4) \qquad a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$$

de l'hyperbole (1), correspond au diamètre 2ρ dans cette dernière. Soient x_1, y_1 les coordonnées de l'extrémité supérieure M_1 du diamètre $2\rho_1$; r_1, r'_1 les rayons vecteurs qui aboutissent en M_1, et $2\varphi_1$ l'angle compris entre ces rayons. Nous avons ainsi

$$\text{(VIII)}\left\{\begin{aligned} \rho_1^2 &= a^2-r_1r'_1\sin^2\varphi_1,\\ c^2 &= a^2-r_1r'_1\cos^2\varphi_1;\end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \rho_1^2 &= b^2+r_1r'_1\cos^2\varphi,\\ c^2 &= b^2+r_1r'_1\sin^2\varphi;\end{aligned}$$

$$\text{(IX)} \qquad \rho_1^2 = a^2+b^2-r_1r'_1; \qquad\qquad \rho_1^2 = b^2-a^2+r_1r'_1;$$

(X)

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{c}\sqrt{\rho_1^2-b^2} = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2-r_1r'_1},\\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{a^2-\rho_1^2} = \frac{b}{c}\sqrt{r_1r'_1-b^2};\end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{c}\sqrt{\rho_1^2-b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{r_1r'_1+a^2},\\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{\rho_1^2+a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{r_1r'_1+b^2}.\end{aligned}$$

9. On sait que

(5) $\rho^2 + \rho_1^2 = a^2 + b^2,$	$\rho^2 - \rho_1^2 = a^2 - b^2,$

d'où l'on tire

$\rho^2 = a^2 + b^2 - \rho_1^2;$	$\rho^2 = a^2 - b^2 + \rho_1^2;$

comparant ces expressions aux valeurs (IV), on obtient pour l'ellipse et pour l'hyperbole

(XI) $\rho_1^2 = rr'_1,$ et de même $\rho^2 = r_1 r'_1.$

Théorème III. — *Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, tout demi-diamètre est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité de son conjugué.*

Pour l'hyperbole, les deux rayons vecteurs r_1, r'_1 partent toujours des foyers de la conjuguée et aboutissent à l'extrémité du diamètre $2\rho_1$ dans cette dernière.

10. Si nous ajoutons, puis retranchons, les égalités (XI) et que nous comparions les résultats aux relations (5), nous obtiendrons

(XII) $a^2 + b^2 = rr' + r_1 r'_1.$	$a^2 - b^2 = r_1 r'_1 - rr'.$
Théorème IV. — La somme *des carrés des deux demi-axes d'une ellipse est égale à* la somme *des produits des rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques.*	Théorème IV. — La différence *des carrés des deux demi-axes d'une hyperbole est égale à* la différence *des produits des rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques.*

11. Ces dernières relations nous donnent

$4a^2 - 4rr' + 4a^2 - 4r_1 r'_1 = 4a^2 - 4b^2;$	$4a^2 + 4rr' = 4b^2 + 4r_1 r'_1;$

or

$$4a^2 - 4rr' = (r'+r)^2 - 4rr' = (r'-r)^2;$$

$$4a^2 - 4r_1r'_1 = (r_1 + r'_1)^2 - 4r_1r'_1 = (r_1 - r'_1)^2;$$

$$4a^2 + 4rr' = (r'-r)^2 + 4rr' = (r'+r)^2,$$

$$4b^2 + 4r_1r'_1 = (r'_1 - r_1)^2 + 4r_1r'_1 = (r'_1 - r_1)^2;$$

donc il vient

$$\text{(XIII)} \quad (r'-r)^2 + (r_1 - r'_1)^2 = 4c^2.$$

THÉORÈME V. — *Dans l'ellipse, la somme des carrés des différences des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués est constante et égale au carré de la distance focale.*

$$r + r' = r_1 + r'_1.$$

THÉORÈME V. — *Dans deux hyperboles conjuguées, les sommes des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués sont égales entre elles.*

12. Les valeurs (XI) changent les expressions des coordonnées (X) dans les suivantes :

(6)

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{c}\sqrt{rr'-b^2} = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2-\rho^2},\\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{a^2-rr'} = \frac{b}{c}\sqrt{\rho^2-b^2}.\end{aligned}\right.$$

$$x_1 = \frac{a}{c}\sqrt{rr'-b^2} = \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2-a^2},$$

$$y_1 = \frac{b}{c}\sqrt{rr'+a^2} = \frac{b}{c}\sqrt{\rho^2+b^2}.$$

Comparons les expressions de ces coordonnées aux valeurs (VII) des coordonnées du point M; nous en déduisons de suite

$$\text{(XIV)} \left\{\begin{aligned} \frac{cx}{a} &= \frac{cy_1}{b} = \sqrt{\rho^2-b^2},\\ \frac{cy}{b} &= \frac{cx_1}{a} = \sqrt{a^2-\rho^2};\end{aligned}\right.$$

$$\frac{cx}{a} = \frac{cy_1}{b} = \sqrt{\rho^2+b^2},$$

$$\frac{cy}{b} = \frac{cx_1}{a} = \sqrt{\rho^2-a^2};$$

d'où nous tirons les relations

$$
(\mathrm{XV})\left\{\begin{aligned}
xy + x_1y_1 &= 0,\\
a^2yy_1 + b^2xx_1 &= 0,\\
xy_1 - yx_1 &= ab,
\end{aligned}\right.
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
xy - x_1y_1 &= 0,\\
a^2yy_1 - b^2xx_1 &= 0,\\
xy_1 - yx_1 &= ab,
\end{aligned}
$$

dont l'interprétation géométrique est facile.

13. Les égalités (XIV) nous donnent encore, en élevant au carré, en ajoutant d'une part en croix, et en retranchant en croix d'autre part,

$$
\begin{aligned}
\frac{c^2x^2}{a^2} + \frac{c^2x_1^2}{a^2} &= c^2,\\
\frac{c^2y^2}{b^2} + \frac{c^2y_1^2}{b^2} &= c^2,
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
\frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2x_1^2}{a^2} &= c^2,\\
\frac{c^2y_1^2}{b^2} - \frac{c^2y^2}{b^2} &= c^2,
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
(\mathrm{XV})\left\{\begin{aligned}
x^2 + x_1^2 &= a^2,\\
y^2 + y_1^2 &= b^2.
\end{aligned}\right.
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
x^2 - x_1^2 &= a^2,\\
y^2 - y_1^2 &= b^2.
\end{aligned}
$$

THÉORÈME VI. — *Dans l'ellipse : 1° la somme des carrés des abscisses de deux points conjugués est constante et égale au carré du demi-grand axe ; 2° la somme des carrés des ordonnées des mêmes points est aussi constante et égale au carré du demi-petit axe.*

THÉORÈME VI. — *Dans deux hyperboles conjuguées : 1° la somme des carrés des abscisses de deux points conjugués est constante et égale au carré du demi-axe transverse de la première hyperbole ; 2° la somme des carrés des ordonnées des mêmes points est aussi constante et égale au carré du demi-axe transverse de l'autre hyperbole.*

14. Nous avons, de même qu'au n° 5,

$$
(\mathrm{XVII})\left\{\begin{aligned}
\cos\varphi_1 &= \frac{b}{\sqrt{r_1r'_1}} = \frac{b}{\rho},\\
\sin\varphi_1 &= \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho},\\
\operatorname{tang}\varphi_1 &= \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b};
\end{aligned}\right.
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
\sin\varphi_1 &= \frac{a}{\rho},\\
\cos\varphi_1 &= \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho},\\
\operatorname{tang}\varphi_1 &= \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}};
\end{aligned}
$$

et, comme nous avons déjà vu au n° 5 que

$$
\text{(XVIII)}\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{b}{\rho_1}, \\
\sin\varphi &= \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho_1}, \\
\tan\varphi &= \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{b},
\end{aligned}
\right.
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
\sin\varphi &= \frac{b}{\rho_1}, \\
\cos\varphi &= \frac{\sqrt{\rho^2-a^2}}{\rho_1}, \\
\tan\varphi &= \frac{b}{\sqrt{\rho^2-a^2}},
\end{aligned}
$$

nous trouvons, pour l'ellipse et l'hyperbole, la relation

$$
\text{(XIX)}\qquad \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{2\rho}{2\rho_1}.
$$

Théorème VII. — *Dans l'ellipse, ainsi que dans deux hyperboles conjuguées, deux diamètres conjugués sont entre eux comme les cosinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés à leurs extrémités.*

15. Nous obtenons ensuite

$$
\text{(XX)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\rho_1^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi_1 = c^2, \\
&\tan^2\varphi + \tan^2\varphi_1 = \frac{c^2}{b^2}.
\end{aligned}
\right.
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} &= \frac{2\rho}{2\rho_1} : \frac{2a}{2b}, \\
\frac{\tan\varphi}{\tan\varphi_1} &= \frac{2b}{2a}.
\end{aligned}
$$

Théorème VIII. — *Dans l'ellipse, la somme des carrés des tangentes des demi-angles que font entre eux les rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres conjugués est constante, et égale le rapport du carré de la distance focale au carré du petit axe.*

Théorème IX. — *Dans deux hyperboles conjuguées, le rapport de deux diamètres conjugués, divisé par le rapport des axes transverses, est égal au rapport des sinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

Théorème X. — *Dans deux hyperboles conjuguées,* *les deux axes transverses sont réciproquement proportionnels aux tangentes des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs de deux points conjugués.*

16. Appelons V l'angle aigu compris entre les diamètres conjugués 2ρ, $2\rho_1$. On sait que

$$\rho\rho_1 \sin V = ab; \tag{7}$$

or les formules (XVI) et (XVII) donnent

$$b^2 = \rho\rho_1 \cos\varphi \cos\varphi_1; \quad (8) \qquad ab = \rho\rho_1 \sin\varphi \sin\varphi_1;$$

substituant les valeurs (8) dans (7), on trouve

$$\text{(XXI)} \quad \sin V = \frac{a}{b} \cos\varphi \cos\varphi_1.$$

Théorème XI. — *Dans toute ellipse, le sinus de l'angle compris entre deux diamètres conjugués est égal au rapport des axes multiplié par le produit des cosinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

$$\sin V = \sin\varphi \sin\varphi_1.$$

Théorème XI. — *Dans deux hyperboles conjuguées, le sinus de l'angle compris entre deux diamètres conjugués est égal au produit des sinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

17. Nous obtenons ensuite, par l'égalité (7),

$$\cos V = \frac{\sqrt{\rho^2\rho_1^2 - a^2b^2}}{\rho\rho_1},$$

ou, en remplaçant ρ_1^2 par ses valeurs tirées des relations (5),

$$\cos V = \frac{\sqrt{\rho^2(a^2+b^2-\rho^2) - a^2b^2}}{\rho\rho_1} = \frac{\sqrt{(a^2-\rho^2)(\rho^2-b^2)}}{\rho\rho_1};$$

$$\cos V = \frac{\sqrt{\rho^2(\rho^2-a^2+b^2) - a^2b^2}}{\rho\rho_1} = \frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2+b^2)}}{\rho\rho_1};$$

d'où il nous vient, en ayant égard aux formules (XVII) et (XVIII),

$$\text{(XXII)}\quad \cos V = \sin\varphi \sin\varphi_1. \qquad\Bigg|\qquad \cos V = \frac{\sqrt{\rho^2 + b^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \cos\varphi \cos\varphi_1.$$

Théorème XII. — *Dans toute ellipse, le cosinus de l'angle aigu compris entre deux diamètres conjugués est égal au produit des sinus des demi-angles que comprennent les rayons vecteurs menés aux extrémités de ces diamètres.*

18. Si nous divisons (XXI) par (XXII), nous aurons

$$\text{(XXIII)}\quad \operatorname{tang} V \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{a}{b}. \qquad\Bigg|\qquad \operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1.$$

Théorème XIII. — *Dans toute ellipse, si l'on multiplie entre elles les tangentes des trois angles que forment entre eux d'abord deux diamètres conjugués, puis les rayons vecteurs de leurs extrémités avec les normales correspondantes, on obtient un produit constant et égal au rapport des axes.*

19. Les abscisses d'un point de l'ellipse et de l'hyperbole peuvent aussi s'exprimer en valeur des rayons vecteurs qui y aboutissent, et les ordonnées en valeur de l'angle compris entre ces rayons vecteurs.

1° En effet, on a

$$a^2 - rr' = \frac{4a^2 - 4rr'}{4} = \frac{(r'+r)^2 - 4rr'}{4} = \frac{(r'-r)^2}{4},$$

$$a^2 + rr' = \frac{4a^2 + 4rr'}{4} = \frac{(r'-r)^2 + 4rr'}{4} = \frac{(r'+r')^2}{4},$$

$$a^2 - r_1 r'_1 = \frac{4a^2 - 4r_1 r'_1}{4} = \frac{(r_1+r'_1)^2 - 4r_1 r'_1}{4} = \frac{(r_1 - r')^2}{4};$$

$$r_1 r'_1 - a^2 = \frac{4r_1 r'_1 + 4b^2}{4} - c^2 = \frac{(r_1 + r'_1)^2}{4} - c^2;$$

substituant dans les valeurs (III) et (X), on trouve

(XXIV)
$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a(r'-r)}{2c} = \frac{r'^2-r^2}{4c}, \\ -x_1 &= \frac{a(r_1-r'_1)}{2c} = \frac{r_1^2-r'^2}{4c}, \end{aligned}\right. \quad \left| \quad \begin{aligned} x &= \frac{a(r'+r)}{2c} = \frac{r'^2-r^2}{4c}, \\ x_1 &= \frac{2c}{a}\sqrt{(r_1+r'_1)^2-4c^2}\ (*); \end{aligned}\right.$$

2° Les formules (V) et (XVII) donnent

$$\begin{aligned} rr'-b^2 &= b^2\operatorname{tang}^2\varphi, \\ \rho^2-b^2 &= b^2\operatorname{tang}^2\varphi_1; \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} rr'-b^2 &= b^2\cot^2\varphi, \\ \rho^2+b^2 &= c^2+\rho^2-a^2 = c^2+a^2\cot^2\varphi_1; \end{aligned}\right.$$

mettant ces valeurs dans les expressions (VII) et (6), on obtient

$$\text{(XXV)}\quad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{b^2}{c}\operatorname{tang}\varphi, \\ y_1 &= \frac{b^2}{c}\operatorname{tang}\varphi_1; \end{aligned}\right. \quad \left| \quad \begin{aligned} y &= \frac{b^2}{c}\cot\varphi, \\ y_1 &= \frac{b}{c}\sqrt{c^2+a^2\cot^2\varphi_1}\ (*). \end{aligned}\right.$$

20. Supposons que les deux *diamètres conjugués* de l'ellipse soient *égaux*; dans ce cas $\rho = \rho'$, et, d'après (XI),

$$\text{(XXVI)}\qquad rr' = r_1 r'_1 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

THÉORÈME XIV. — *Dans l'ellipse, le produit des rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux est constant et égal à la demi-somme des carrés des demi-axes.*

21. Puisque $r + r' = r_1 + r'_1 = 2a$, on a, en vertu de (XXVI)

$$(r+r')^2 - 4rr' = (r_1+r'_1)^2 - 4r_1 r'_1$$

(*) On trouve

$$x_1 = \frac{a^2}{c}\cot\varphi_1, \quad y_1 = \frac{b(r'^2_1 - r_1^2)}{4c}.$$

ou

$$(r' - r)^2 = (r_1 - r'_1)^2,$$

ce qui change la relation (XIII) dans la suivante

(XXVII) $$r' - r = r_1 - r'_1 = c\sqrt{2}.$$

THÉORÈME XV. — *Dans l'ellipse, le différence des rayons vecteurs qui aboutissent à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux est égale au côté du carré inscrit dans le cercle qui a la distance focale pour diamètre.*

22. On trouve, pour ces rayons vecteurs, les valeurs,

(XXVIII) $$r' = a + \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad r = a - \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

23. Si *l'hyperbole est équilatère,* c'est-à-dire si $a = b$, il viendra $c = a\sqrt{2}$, $\rho^2 = rr'$, $\sin\varphi = \frac{a}{\rho}$, puis

(XXIX) $$\left\{\begin{aligned} x = y_1 &= \frac{a}{c}\sqrt{rr' + a^2} = \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2 + a^2}, \\ y = x_1 &= \frac{a}{c}\sqrt{rr' - a^2} = \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2 - a^2}. \end{aligned}\right.$$

THÉORÈME XVI. — *Dans l'hyperbole équilatère, tout rayon central est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs qui y aboutissent.*