Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 472-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__472_1>

CORRESPONDANCE.

1. Un *abonné* nous a écrit, il y a déjà quelque temps (*), pour savoir où l'on trouve la démonstration de la proposition suivante, attribuée à Joachimstal :

(*) Il aurait reçu plus tôt notre réponse, s'il nous avait fait connaître son nom et sa demeure.

Si l'on fait passer une circonférence par les pieds de trois quelconques des quatre normales menées d'un point à une ellipse, le quatrième point commun aux deux courbes sera diamétralement opposé, sur l'ellipse, au pied de la quatrième normale.

Ce théorème a été démontré dans les *Nouvelles Annales* (t. VI, p. 241, 1re série). Nous en donnerons ici une autre démonstration fondée sur cette remarque qu'*il est toujours possible de faire passer une circonférence par les quatre points communs à deux lignes du second degré représentées, en coordonnées rectangulaires, par des équations privées du rectangle des variables.*

C'est ce qui résulte d'un calcul très-simple; car, si les deux lignes considérées ont pour équations

$$A x^2 + C y^2 + D x + \ldots = 0,$$
$$A' x^2 + C' y^2 + D' x + \ldots = 0,$$

toute conique passant par leurs quatre points d'intersection aura, comme on sait, une équation de la forme

$$(A' - \lambda A) x^2 + (C' - \lambda C) y^2 + (D - \lambda D') x + \ldots = 0,$$

et inversement, quelle que soit la valeur de λ : l'équation précédente est celle d'une conique passant par les quatre points communs aux deux premières lignes.

Or, en disposant de l'indéterminée λ de manière que $A' - \lambda A = C' - \lambda C$ (*), cette équation représente une circonférence.

(*) L'égalité $A' - \lambda A = C' - \lambda C$ donne $\lambda = \frac{A' - C'}{A - C}$, valeur réelle, et qui est finie; car, si l'on avait $A - C = 0$, l'une des deux lignes données serait une circonférence, et, dans ce cas, il n'y a pas lieu à démonstration.

Revenons maintenant au théorème de Joachimstal.

Soient A, B, C, D les pieds des quatre normales menées d'un point P à une ellipse; O le centre de cette courbe, et $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, son équation, en coordonnées rectangulaires.

De l'un quelconque des points A, B, C, D, par exemple du point D, on mène le diamètre DOD'; et il s'agit de faire voir que les quatre points A, B, C, D' appartiennent à une même circonférence.

A cet effet, nommons α, β les coordonnées du point P, et x, y celles du pied de l'une des normales menées du point P à l'ellipse. Nous aurons

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$(2) \qquad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

en posant

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

et par suite l'équation

$$(3) \quad a^2y^2 + b^2x^2 + \lambda c^2xy + \lambda b^2\beta x - \lambda a^2\alpha y - a^2b^2 = 0,$$

où λ désigne une racine de l'équation du troisième degré qui détermine les trois systèmes de deux droites passant par les points A, B, C, D.

En prenant pour λ la racine correspondant au système des deux droites AD, BC, il suffira pour déterminer les coefficients angulaires m et m' de ces droites, d'égaler à zéro les termes du second degré de l'équation (3), et de résoudre l'équation résultante, par rapport à $\frac{y}{x}$; on a donc évidemment

$$mm' = \frac{b^2}{a^2},$$

égalité qui montre que le produit des coefficients angulaires des deux droites AD, BC est indépendant de la position du point P, et qu'il reste le même pour chacun des trois systèmes de deux droites passant par les points A, B, C, D, pieds des quatre normales menées du point P à l'ellipse.

En désignant par m'' le coefficient angulaire de la corde AD′, supplémentaire de AD, on aura

$$mm'' = -\frac{b^2}{a^2};$$

donc

$$m'' = -m',$$

c'est-à-dire que les coefficients angulaires des cordes AD′ et BC sont égaux et de signes contraires. Il en résulte que la ligne du second degré composée de ces deux cordes est représentée par une équation de la forme

$$(y - m'x - n')(y + m'x - n'') = 0,$$

qui est indépendante du rectangle des variables. Or, il en est de même de l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0;$$

par conséquent, les quatre points A, B, C, D′, communs à ces deux lignes, appartiennent à une même circonférence. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Lorsque l'on connaît deux des quatre normales menées d'un point à l'ellipse, il est facile d'obtenir les deux autres. Car, en considérant toujours l'équation (3) comme représentant l'un des systèmes de deux droites qui rencontrent la courbe aux points A, B, C, D, on voit que le produit des distances du centre de l'ellipse aux points où ces droites coupent le grand axe $2a$ est égal à $-a^2$, et que le produit des distances de ce centre aux points d'intersection des mêmes droites et du second axe $2b$ a pour valeur — b^2. Ainsi, lorsqu'une des droites sera donnée, on obtiendra immédiatement l'autre en déterminant ses points d'intersection avec les deux axes de l'ellipse.

2. Nous devons à l'obligeance de l'un de nos lecteurs une rectification qui n'est pas sans importance : la démonstration qu'on a donnée (2e série, t. VII, p. 240) du théorème énoncé sous le n° 61 est incomplète. C'est donc à tort que dans la Table des Matières du tome VII (année 1868), la question 61 a été placée au nombre des questions résolues.

3. Une solution géométrique et très-exacte de la question 905 nous a été adressée en avril dernier par M. *Mas* (*François*), élève au lycée de Toulouse; c'est par oubli que la solution de M. Mas n'a pas été mentionnée dans le numéro de mai, p. 238. Nous avons à réparer une omission semblable à l'égard de M. *Demartres*, à Mézin, et de M. *Guébhard*, étudiant en médecine, pour leurs solutions des questions 902 et 901. Enfin, la même réparation est due à M. *Netto*, étudiant en Mathématiques à Berlin, qui a résolu la question 930.

4. Un Professeur, *ami du progrès et de la clarté*, exprime le regret de n'avoir pas suffisamment compris plusieurs des articles insérés dans les *Nouvelles Annales*, et notamment ceux qui concernent la *métaphysique du calcul des expressions négatives et imaginaires*. Il désirerait plus de développements sur ce sujet. Pour répondre à ce désir, nous ne croyons pouvoir mieux faire que de conseiller la lecture de l'ouvrage intitulé : *Des formes imaginaires en algèbre; leur interprétation en abstrait et en concret*; par M. F. VALLÈS, Inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, Membre des Académies de Laon et de Cherbourg.

L'Auteur a, dans 300 pages d'impression, donné à ses idées sur cette matière tout le développement qu'il est possible de désirer. (G.)