LÉON GEOFFROY

Solution du problème donné aux examens de la licence (novembre 1868)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 450-452

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__450_1>

SOLUTION DU PROBLÈME DONNÉ AUX EXAMENS DE LA LICENCE
(Novembre 1868);

PAR M. LÉON GEOFFROY,
Ingenieur, Professeur de Mathématiques.

Trouver une surface de révolution telle, que les rayons de courbure principaux soient en chaque point égaux et dirigés en sens contraire.

Dans une surface de révolution les rayons de courbure principaux sont, d'une part, celui de la courbe méridienne au point considéré; d'autre part, la partie de la normale comprise entre l'axe et la surface.

Toute la question se réduit à trouver la courbe méridienne, et on voit que cette courbe doit être telle, que sa normale en chaque point soit égale au rayon de courbure et dirigée en sens contraire.

Prenons l'axe de la surface pour axe des x, les coordonnées étant rectangulaires.

La normale a pour valeur

$$y\sqrt{1+y'^2},$$

le rayon de courbure a pour expression

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

En écrivant que ces deux expressions sont égales, au signe près, on trouve l'équation différentielle de la méridienne

$$y = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Posons

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}, \quad dx = \frac{dy}{p}:$$

en substituant il vient

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} = 2\,\frac{dy}{y},$$

et, en intégrant,

$$\log \text{néper}(1+p^2) = 2\log' \mathrm{Y} - 2\log' \mathrm{A} = \log \text{nép}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2,$$

d'où

$$p = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2 - 1}:$$

or

$$p = \frac{dy}{dx},$$

donc

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2 - 1}};$$

d'où

$$x = \log \text{nép}\left[\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{A}}\right)^2 - 1}\,\right] + \mathrm{C}$$

ou bien

$$e^{x-C} = \frac{Y}{A} + \sqrt{\left(\frac{Y}{A}\right)^2 - 1};$$

de là on déduit

$$Y = \frac{A}{2}\left(e^{x-C} + e^{-(x-C)}\right),$$

équation d'une chaînette dont l'axe est perpendiculaire à l'axe de la surface. Les constantes A et C se détermineront facilement, en disposant de l'axe des Y, et en plaçant la courbe de manière que la normale au sommet soit égale au rayon de courbure en ce point.