

E. CATALAN

Note sur la partition des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 407-414

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8_407_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA PARTITION DES NOMBRES (*);

PAR E. CATALAN,

Professeur à l'Université de Liège.

PROBLÈME. — *De combien de manières peut-on former une somme n , avec q nombres entiers, égaux ou inégaux?*

I. Désignons par $N_{n,q}$ le nombre cherché, et considérons l'équation

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_q = n.$$

En supposant que les valeurs des inconnues soient rangées par ordre de grandeur *non décroissante*, nous pourrons attribuer à x_1 , successivement, les α valeurs entières

$$1, 2, 3, \dots, \alpha,$$

α représentant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{q}$; de sorte que

$$(2) \quad \alpha = \left(\frac{n}{q} \right) (**).$$

Soit, en particulier, $x_1 = a$: les valeurs de x_2, x_3, \dots, x_q ne pouvant être inférieures à a , nous ferons $x_2 = y_2 + a - 1, x_3 = y_3 + a - 1, \dots, x_q = y_q + a - 1$;

(*) Cette Note est extraite d'un volume de *Mélanges mathématiques*, qui va paraître.

(**) La notation $\left(\frac{n}{q} \right)$ equivaut à celle-ci : $E \left(\frac{n}{q} \right)'$, adoptée par Legendre.

et nous aurons ainsi, au lieu de (1), α équations de la forme

$$(3) \quad y_2 + y_3 + \dots + y_q = n - 1 - (a - 1)q,$$

dans lesquelles les $q - 1$ inconnues pourront recevoir les valeurs 1, 2, 3... Le nombre des solutions de l'équation (3) étant $N_{n-1-(a-1)q, q-1}$, il s'ensuit

$$(4) \quad N_{n,q} = \sum_{a=1}^{a=\alpha} N_{n-1-(a-1)q, q-1},$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} N_{n,q} = N_{n-1, q-1} + N_{n-1-q, q-1} + N_{n-1-2q, q-1} + \dots \\ \quad + N_{n-1-(\alpha-1)q, q-1}. \end{cases}$$

II. Le nombre des termes du second membre, dans l'équation (5), est α . Si $q = 2$, chacun de ces termes se réduit à 1; donc $N_{n,2} = \alpha$, ou

$$(6) \quad N_{n,2} = \binom{n}{2},$$

relation évidente.

III. Si $q = 3$, l'équation (5) devient

$$(7) \quad N_{n,3} = N_{n-1,2} + N_{n-4,2} + N_{n-7,2} + \dots + N_{n+2-3\alpha,2};$$

ou, d'après la formule (6),

$$(8) \quad N_{n,3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-4}{2} + \binom{n-7}{2} + \dots + \binom{n+2-3\alpha}{2};$$

par exemple :

$$\begin{aligned} N_{19,3} &= \binom{18}{2} + \binom{15}{2} + \binom{12}{2} + \binom{9}{2} + \binom{6}{2} + \binom{3}{2} \\ &= 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 30; \end{aligned}$$

à cause de $\alpha = \binom{19}{3} = 6$.

En effet, les décompositions du nombre 19 sont :

1+1+17, 2+2+15, 3+3+13, 4+4+11, 5+5+9, 6+6+7.
 1+2+16, 2+3+14, 3+4+12, 4+5+10, 5+6+8.
 1+3+15, 2+4+13, 3+5+11, 4+6+9, 5+7+7,
 1+4+14, 2+5+12, 3+6+10, 4+7+8,
 1+5+13, 2+6+11, 3+7+9,
 1+6+12, 2+7+10, 3+8+8,
 1+7+11, 2+8+9,
 1+8+10,
 1+9+9,

IV. Pour trouver le second membre de l'équation (8), on doit considérer les diverses formes du nombre n , relatives au diviseur 6. On trouve ainsi, sans difficulté :

$$(9) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pour } n = 6n', \quad N_{n'} = \lambda = 3n'^2; \\ n = 6n' + 1, \quad N = n'(3n' + 1); \\ n = 6n' + 2, \quad N = n'(3n' + 2); \\ n = 6n' + 3, \quad N = (n' + 1)^2 - n'^2; \\ n = 6n' + 4, \quad N = (n' + 1)(3n' + 1); \\ n = 6n' + 5, \quad N = (n' + 1)(3n' + 2). \end{array} \right\}$$

V. *Remarque.* — Au lieu de ce système de formules, on peut prendre celui-ci :

$$(10) \quad \left. \begin{array}{l} n = 6n', \quad N = \frac{n^2}{12}; \\ n = 6n' + 1, \quad N = \frac{n^2 - 1}{12}; \\ n = 6n' + 2, \quad N = \frac{n^2 - 4}{12}; \\ n = 6n' + 3, \quad N = \frac{n^2 + 3}{12}; \\ n = 6n' + 4, \quad N = \frac{n^2 - 4}{12}; \\ n = 6n' + 5, \quad N = \frac{n^2 - 1}{12}. \end{array} \right\}$$

Il en résulte ce théorème curieux, proposé par M. Vachette (*) :

Parmi les quatre nombres n^2 , $n^2 - 1$, $n^2 - 4$, $n^2 + 3$, il en est un divisible par 12 : le quotient égale le nombre des manières différentes de partager n en trois parties entières, positives, égales ou inégales.

VI. Quand q surpasse 3, il paraît difficile d'exprimer le nombre des solutions de l'équation (1), au moyen d'une formule qui ne soit pas illusoire, et l'on est réduit à faire usage, une ou plusieurs fois, de la relation (5). Soit, par exemple, $n = 39$, $q = 4$; d'où $\alpha = 9$. Cette relation devient

$$N_{39,4} = N_{38,3} + N_{34,3} + N_{30,3} + N_{26,3} + N_{22,3} + N_{18,3} \\ + N_{14,3} + N_{10,3} + N_{6,3}.$$

Mais par les formules (10) :

$$N_{38,3} = \frac{38^2 - 4}{18} = 120,$$

$$N_{34,3} = \frac{34^2 - 4}{12} = 96,$$

$$N_{30,3} = \frac{30^2}{12} = 75,$$

$$N_{26,3} = \frac{26^2 - 4}{12} = 56,$$

$$N_{22,3} = \frac{22^2 - 4}{12} = 40,$$

$$N_{18,3} = \frac{18^2}{12} = 27,$$

$$N_{14,3} = \frac{14^2 - 4}{12} = 16,$$

$$N_{10,3} = \frac{10^2 - 4}{12} = 8,$$

$$N_{6,3} = \frac{6^2}{12} = 3;$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, octobre 1867.

donc

$N_{39,4} = 120 + 96 + 75 + 56 + 40 + 27 + 16 + 8 + 3 = 441$,
résultat conforme à celui que donne Euler (*).

VII. Si, comme l'a fait ce grand géomètre, on veut construire une *table* des valeurs de la fonction $N_{n,q}$, on peut, au lieu de la relation (5), appliquer avec avantage l'équation suivante :

$$(11) \quad N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-q,q},$$

ou bien celle-ci :

$$(12) \quad N_{n+q,q} = N_{n+q-1,q-1} + N_{n,q} (**).$$

Au moyen de cette relation et des valeurs initiales

$$N_{n,1} = 1, \quad N_{n+1,1} = 1, \quad N_{n,n} = 1,$$

on forme aisément la table suivante, qui contient les valeurs de $N_{n+q,q}$.

(*) *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, t. 1, p. 252.

(**) Les équations (11) et (12) sont des conséquences immédiates de la relation (5).

Table des valeurs de $N_{n+q,q}$.

		Valeurs de n .															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Valeurs de q .	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
	4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
	5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101
	6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136
	7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164
	8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186
	9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201
	10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212
	11	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219
	12	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224
	13	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227
	14	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229

D'après la formule (12) :

Un terme quelconque de la troisième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de trois rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus;

Un terme quelconque de la quatrième ligne horizon-

tales est égal à celui qui le précède de quatre rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;

Etc.

VIII. De la relation (11), on peut déduire très-facilement la fonction génératrice de $N_{n,q}$. En effet, soient

$$F(x, q) = x^q + N_{q+1,q}x^{q+1} + \dots + N_{n,q}x^n + \dots,$$

$$F(x, q - 1) = x^{q-1} + N_{q,q-1}x^q + \dots + N_{n-1,q-1}x^{n-1} + \dots$$

Multipliant la première égalité par $1 - x^q$, la seconde par x , on trouve deux développements qui doivent être identiques ; donc

$$F(x, q) = \frac{x}{1 - x^q} F(x, q - 1);$$

et comme

$$F(x, 1) = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1 - x},$$

la fonction génératrice cherchée est

$$(13) \quad F(x, q) = \frac{x^q}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\dots(1 - x^q)} (*).$$

IX. Le second membre de la dernière équation est égal au produit des séries

$$\begin{aligned}
& x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots, \\
& x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots, \\
& x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + \dots, \\
& x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \dots, \\
& \dots\dots\dots, \\
& x + x^{q+1} + x^{2q+1} + x^{3q+1} + x^{4q+1} + \dots
\end{aligned}$$

L'exposant de x^n , dans ce produit, étant la somme des

(*) Ce théorème est dû à Euler.

exposants de x dans les facteurs de chacun des produits partiels, on a ce théorème remarquable (*) :

Il y a autant de manières de décomposer un nombre n en q parties entières, égales ou inégales, qu'il y en a de décomposer ce même nombre en q parties appartenant respectivement aux progressions

$$\begin{aligned} & 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \\ & 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, \\ & 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots, \\ & 1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots, \\ & \dots\dots\dots, \\ & 1, (q+1), (2q+1), (3q+1), (4q+1), \dots \end{aligned}$$

Par exemple, nous avons trouvé que le nombre 19 admet 30 décompositions en 3 parties. Or ce nombre 19 admet aussi les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} & 1+1+17, \quad 4+1+14, \quad 7+1+11, \quad 10+1+8, \quad 13+1+5, \quad 16+1+2, \\ & 1+3+15, \quad 4+3+12, \quad 7+3+9, \quad 10+3+6, \quad 13+3+3, \\ & 1+5+13, \quad 4+5+10, \quad 7+5+7, \quad 10+5+4, \quad 13+5+1, \\ & 1+7+11, \quad 4+7+8, \quad 7+7+5, \quad 10+7+2, \\ & 1+9+9, \quad 4+9+6, \quad 7+9+3, \\ & 1+11+7, \quad 4+11+4, \quad 7+11+1, \\ & 1+13+5, \quad 4+13+2, \\ & 1+15+3, \\ & 1+17+1. \end{aligned}$$

et celles-ci sont également au nombre de 30.

(*) Il a été donné, sous une autre forme, par Euler (*Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 244).