Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 38-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__38_0>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 845

(voir 2e série, t. VII, p. 96),

PAR M. LÉON BARBIER,
Élève au Lycée de Strasbourg.

On donne deux surfaces du second degré homofocales A *et* B; *par une droite* D *prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à cette surface. Soient b et b' les points où deux de ces plans tangents touchent la surface* B (*), *les droites ab, ab' sont dans le même plan que la normale en a à la surface* A, *et sont également inclinées sur cette normale.*

(LAGUERRE.)

On sait que le lieu du pôle d'un plan tangent à une surface du second degré par rapport aux surfaces homofocales est la normale au point de contact.

Le pôle, par rapport à la surface B, du plan déterminé par le point a et la droite D se trouve donc sur la normale aN menée par le point a à la surface A. D'un autre côté, ce pôle doit se trouver sur la droite bb' conjuguée de la droite D par rapport à la surface B. Par suite, les droites aN, bb' se coupent, et leur point de rencontre N est le pôle du plan tangent en a par rapport à la surface B.

Concevons maintenant un plan mené par la droite D,

(*) a le point où l'un des plans touche la surface A.

son point d'intersection avec la droite bb', et son pôle par rapport à la surface B, sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points b et b'. En particulier le point R où le plan tangent en a à la surface A coupe la droite bb', et son pôle N par rapport à la surface B, sont conjugués harmoniques par rapport aux points b, b'; or l'angle $\mathrm{N}a\mathrm{R}$ est droit, donc la normale $a\mathrm{N}$ est la bissectrice de l'angle bab'.

On peut déduire immédiatement de ces deux propriétés quelques théorèmes connus.

Supposons que la droite D soit tangente à la surface A au point a; les plans tangents à la surface B menés par la droite D contiennent les droites ab, ab'; ces plans sont donc également inclinés sur le plan tangent au point a à la surface A. Ainsi, étant données deux surfaces homofocales A et B et une droite D tangente à la surface A, les plans tangents à la surface B menées par la droite D sont également inclinés sur le plan tangent à la surface A mené par la droite D.

Soient C une seconde surface homofocale avec A, et c, c' les points de contact des plans tangents menés par la droite D à cette surface, la normale $a\mathrm{N}$ rencontre cc'. Faisons maintenant varier la surface A, toutes les normales menées par les points de contact des plans tangents, menés aux surfaces A par la droite D, rencontreront les droites fixes cc', bb'; de plus, ces normales sont parallèles à un plan perpendiculaire à la droite D, donc elles engendrent un paraboloïde hyperbolique. Ce paraboloïde peut être considéré comme étant la surface engendrée par les droites conjuguées de la droite D par rapport aux surfaces homofocales à la surface A.

Voici une autre conséquence de la proposition démontrée.

La normale en a à la surface A rencontre la corde de contact bb' et toutes les cordes analogues, lesquelles cordes sont les génératrices d'un même paraboloïde hyperbolique. Donc, si par une droite fixe on mène différents plans tangents à un système de surfaces du second degré homofocales, les normales menées aux points de contact sont les génératrices du second système de ce paraboloïde : théorème donné par M. Chasles (*Aperçu historique*, p. 398).

Question 864.

(voir 2e série, t. VII, p. 191);

PAR M. KIEPERT,
Étudiant en Mathématiques, à Berlin.

Construire un triangle, connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés.

(LEMOINE.)

La solution ci-après donne lieu à une élégante construction.

Lemme I. — Si, sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC, on décrit des triangles équilatéraux ABC_1, ACB_1, BCA_1 les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont égales, se coupent en un même point, et les angles qu'elles forment entre elles sont égaux à 60 degrés.

Lemme II. — Les choses étant ainsi posées, si je fais sur $A_1B_1C_1$ la même construction faite sur ABC, j'aurai trois triangles équilatéraux $A_1B_1C_2$, $A_1C_1B_2$, $B_1C_1A_2$, les trois droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_1 seront égales et se couperont aussi au point O; car, dans les deux cas, on obtiendra le point de rencontre de A_1A, B_1B, C_1C, ou de A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, en décrivant sur A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1

des segments capables de 120 degrés. Les points A_1, O, A, A_2 sont donc en ligne droite, ainsi que les points B_1, O, B, B_2 et C_1, O, C, C_2.

Lemme III. — Le point A est le milieu de $A_1 A_2$:
» B » $B_1 B_2$;
» C » $C_1 C_2$.

En effet, les quadrilatères inscriptibles $OBCA_1$, $OB_1C_1A_2$ donnent, en remarquant que le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés,

$$OA_1 = OB + OC \quad \text{et} \quad OA_2 = OB_1 + OC_1;$$

de même

$$OB_1 = OA + OC, \qquad OB_2 = OA_1 + OC_1,$$
$$OC_1 = OA + OB, \qquad OC_2 = OA_1 + OB_1,$$

d'où

$$AA_1 = OA + OA_1 = OA + OB + OC,$$
$$AA_2 = OA_1 + OA_2 = OA_1 + OB_1 + OC_1.$$

Mais on a

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = 2(OA + OB + OC).$$

Donc

$$AA_2 = 2AA_1.$$

(C. Q. F. D.)

De là résulte la construction suivante :

Sur $A_1 B_1$ décrivez le triangle équilatéral $A_1 B_1 C_2$,
» $A_1 C_1$ » » $A_1 C_1 B_2$,
» $B_1 C_1$ » » $B_1 C_1 A_2$.

Les milieux de $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ sont les sommets A, B, C du triangle cherché.

L'auteur démontre ensuite le théorème suivant par des considérations empruntées à la géométrie analytique :

1° Si sur les côtés AB, CA, BC d'un triangle on construit des triangles isocèles semblables ABC_1, ACB_1,

CBA_1, les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au même point;

2° Le lieu de ce point est une conique si l'angle à la base des triangles isocèles varie.

L'équation de cette conique, les axes étant rectangulaires, est

$$\frac{\sin(A-B)}{\gamma}+\frac{\sin(C-A)}{\beta}+\frac{\sin(B-C)}{\alpha}=0,$$

$\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, représentant les équations des trois côtés BC, AC, AB prises sous la forme

$$\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha-p=0,$$

et A, B, C les angles du triangle.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Willière, professeur à Arlon; Brocard, sous-lieutenant du Génie; Claverie, du lycée de Clermont (classe de M. Lafon); Joffre, du lycée Charlemagne (institution Barant); Racine, du lycée de Poitiers; Augier, du lycée de Caen; Niebylowski; L. Henri Lorrez.

Toutes ces solutions sont simples, mais moins complètes que celle de M. Kiepert que nous avons résumée.