Nouvelles annales de mathématiques

A. Genocchi

Sur le passage des différences aux différentielles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 385-388

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__385_0>

SUR LE PASSAGE DES DIFFÉRENCES AUX DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. A. GENOCCHI,
Professeur de l'Université de Turin.

Les raisonnements par lesquels on démontre, même dans les Traités les plus recommandables de calcul différentiel, le théorème général $\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$ me semblent peu satisfaisants. On s'appuie sur un lemme d'après lequel la dérivée partielle $\varphi_x^i(x, \alpha)$ d'une fonction de deux variables qui est toujours nulle pour $\alpha = 0$ serait nulle aussi pour $\beta = 0$, et l'on déduit ce lemme de la relation connue

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h).$$

Mais, en examinant la démonstration de cette relation, on ne voit pas clairement comment elle peut avoir lieu dans le cas du lemme, car la plupart des considérations qu'on emploie deviennent alors inapplicables; d'un autre côté, dans l'énoncé du lemme, il ne faudrait pas parler des valeurs des fonctions $\varphi(x, \alpha)$, $\varphi'_x(x, \alpha)$, dans le cas de $\alpha = 0$; mais de leurs *limites*, et pour l'appliquer, il faudrait démontrer que toutes les conditions sous lesquelles il subsiste se trouvent vérifiées, ce qu'on ne fait pas.

Or le théorème dont il s'agit peut être établi d'une manière rigoureuse et fort simple, en supposant même, pour plus de généralité, que les accroissements successifs de x soient des quantités égales ou inégales h, h_1, h_2, etc.

Soit $y = f(x)$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, en prenant les dérivées, on aura

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = f'(x+h) - f'(x) = \Delta f'(x) = \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

et de là on tirera, pour n quelconque,

$$\Delta^n \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(\Delta^n y)}{dx},$$

car, en admettant cette équation et prenant les différences des deux membres, il vient

$$\Delta^{n+1} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \Delta \left[\frac{d(\Delta^n y)}{dx}\right] = \Delta \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où l'on a fait $z = \Delta^n y$, et, comme

$$\Delta \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d(\Delta z)}{dx} = \frac{d(\Delta^{n+1} y)}{dx},$$

il s'ensuit

$$\Delta^{n+1} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(\Delta^{n+1} y)}{dx},$$

de manière que l'équation, si elle a lieu pour l'indice n, a lieu aussi pour l'indice $n + 1$.

Maintenant, ε étant une quantité infiniment petite avec h, on a par définition

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon,$$

si h et Δy désignent les accroissements correspondants de x et y. En faisant $\frac{\Delta y}{h} = y_1$, $\frac{dy}{dx} = y'$, et appelant h_1 un deuxième accroissement de x, on aura pareillement

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy_1}{dx} + \varepsilon_1, \quad \frac{\Delta y'}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon',$$

où ε et ε' sont des quantités infiniment petites avec h; mais, d'après ce qu'on a démontré,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d(\Delta y)}{dx} = \frac{1}{h}\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

ou

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\Delta y'}{h};$$

donc

$$\frac{\Delta y_1}{h_1} = \frac{dy'}{dx} + \varepsilon' + \varepsilon_1,$$

savoir :

$$\frac{\Delta^2 y}{hh_1} = \frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon' + \varepsilon_1,$$

d'où, en passant à la limite pour $h = 0$ et $h_1 = 0$, on déduit

$$\lim\left(\frac{\Delta^2 y}{hh_1}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

On peut s'élever aux différences et dérivées d'ordres supérieurs pour établir la formule générale

$$\lim\left(\frac{\Delta^n y}{hh_1h_2\ldots h_{n-1}}\right) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

En effet, si cette formule est vraie pour l'ordre n, on pourra écrire

$$\frac{\Delta^n y}{hh_1\ldots h_{n-1}} = \frac{d^n y}{dx^n} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que les accroissements $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$; soit $\dfrac{\Delta^n y}{hh_1\ldots h_{n-1}} = y_n$, $\dfrac{dy}{dx} = y'$, et soit donné à x un nouvel accroissement h_n, nous aurons

$$\frac{\Delta y_n}{h_n} = \frac{dy_n}{dx} + \varepsilon_n, \quad \frac{\Delta^n y'}{hh_1\ldots h_{n-1}} = \frac{d^n y'}{dx^n} + \varepsilon',$$

ε_n et ε' étant aussi infiniment petits avec tous les accroissements ; et, comme

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{1}{hh_1\ldots h_{n-1}} \frac{d(\Delta^n y)}{dx}$$

et

$$\frac{d(\Delta^n y)}{dx} = \Delta^n \left(\frac{dy}{dx}\right) = \Delta^n y',$$

il viendra

$$\frac{\Delta y_n}{h_n} = \frac{d^n y'}{dx^n} + \varepsilon' + \varepsilon_n,$$

ou

$$\frac{\Delta^{n+1} y}{h h_1 h_2 \ldots h_n} = \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + \varepsilon' + \varepsilon_n,$$

ce qui montre que la même formule a lieu pour l'ordre $n+1$.