NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HILAIRE

Solution du problème proposé au concours d'agrégation de 1867

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 362-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__362_1>

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1867;

PAR M. A. HILAIRE.

Lieu d'un point tel que les deux tangentes menées de ce point à une ellipse donnée interceptent sur une droite fixe une longueur constante.

(*) SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, traduit par M. Bazin, p. 217.

Je prends pour axes les deux diamètres conjugués de l'ellipse, dont l'un est parallèle à la droite fixe.

L'équation de l'ellipse est

$$(1)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

celle de la droite fixe

$$(2)\qquad x = K.$$

L'ensemble des deux tangentes menées à la courbe par un point (α, β) est représenté par l'équation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \\ &\quad = (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2. \end{aligned}\right.$$

Si je fais dans cette équation $x = K$, l'équation résultante en y donne les ordonnées d'intersection du système des deux tangentes avec la droite fixe. Il suffit d'exprimer que la différence des racines de cette équation est égale à la longueur constante que j'appellerai $2L$; dans la relation trouvée, je remplacerai α et β par x et y et j'aurai l'équation du lieu.

Voici le calcul :

$$\begin{aligned} &(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(a^2y^2 + b^2K^2 - a^2b^2) \\ &\quad = (a^2\beta y + b^2\alpha K - a^2b^2)^2, \\ &(b^2\alpha^2 - a^2b^2)a^2y^2 - 2a^2\beta(b^2\alpha K - a^2b^2)y \\ &\quad + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(b^2K^2 - a^2b^2) - (b^2\alpha K - a^2b^2)^2 = 0, \\ &(\alpha^2 - a^2)a^2y^2 - 2a^2\beta(\alpha K - a^2)y \\ &\quad + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(K^2 - a^2) - b^2(\alpha K - a^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est de la forme

$$Ay^2 - 2By + C = 0.$$

La différence des racines est $\dfrac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A}$; la condition demandée est donc $\frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A} = 2L$. Supprimant le facteur 2 et élevant ensuite au carré,

$$B^2 - AC = A^2L^2.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer A, B, C par leurs valeurs

$$\begin{aligned}
&a^4\beta^2(K\alpha - a^2)^2 - a^2(\alpha^2 - a^2)\\
&\quad\times[(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)(K^2 - a^2) - b^2(K\alpha - a^2)^2]\\
&\quad= a^4(\alpha^2 - a^2)^2L^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a^2y^2(Kx - a^2)^2 - (x^2 - a^2)\\
&\quad\times[(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(K^2 - a^2) - (b^2Kx - a^2)^2]\\
&\quad= a^2L^2(x^2 - a^2)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)\\
&\quad\times[(Kx - a^2)^2 - (K^2 - a^2)(x^2 - a^2) - 2a^2Kx + K^2a^2 + a^2x^2]\\
&\quad= a^2L^2(x^2 - a^2)^2,
\end{aligned}$$

$$(4)\quad (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(x - K)^2 = L^2(x^2 - a^2)^2.$$

Telle est l'équation du lieu.

Je vais l'écrire en la résolvant par rapport à y, ou, ce qui revient au même, en la résolvant par rapport à y^2 :

$$(5)\qquad y^2 = \frac{(x^2 - a^2)[L^2(x^2 - a^2) - b^2(x - K)^2]}{a^2(x - K)^2}.$$

On voit que la courbe est du quatrième degré, et que l'axe des x est un diamètre des cordes parallèles à l'axe des y.

Discussion.

Elle dépend évidemment de l'étude du trinôme du second degré

$$\begin{aligned}
&L^2(x^2 - a^2) - b^2(x - K)^2\\
&\quad= (L^2 - b^2)x^2 + 2b^2Kx - a^2L^2 - b^2K^2.
\end{aligned}$$

La quantité $B^2 - AC$ est, dans ce cas,

$$(6)\quad b^4K^2 + (L^2 - b^2)(a^2L^2 + b^2K^2) = L^2[b^2K^2 + a^2(L^2 - b^2)].$$

$$(7)\quad = L^2[a^2L^2 + b^2(K^2 - a^2)].$$

Le coefficient de x^2 étant $L^2 - b^2$, on est conduit à examiner les différentes hypothèses correspondant au signe de cette quantité.

On y est amené encore d'une autre manière.

Si l'on cherche par la méthode ordinaire les asymptotes non parallèles à l'axe des y (*), on trouve pour c et d les valeurs suivantes : $c = \pm \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{a}$, $d = \pm \frac{KL^2}{a\sqrt{L^2 - b^2}}$; donc l'existence des asymptotes dépend du signe de $L^2 - b^2$:

$L^2 - b^2 > 0$: deux asymptotes réelles, inclinées sur l'axe des x, et le coupant au même point;

$L^2 - b^2 = 0$: c s'annule et e devient infini; les deux asymptotes deviennent parallèles à l'axe des x, mais elles se transportent à l'infini;

$L^2 - b^2 < 0$: deux asymptotes imaginaires.

$$1^\circ\ L^2 - b^2 > 0.$$

Les racines sont réelles et de signe contraire : appelons-les $-e$ et $+d$.

1° $K > a$. — On voit aisément, par des substitutions, que $-e$ est comprise entre $-\infty$ et $-a$, et que d est comprise entre a et K.

On a alors

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{a^2}\frac{(x+e)(x+a)(x-a)(x-d)}{(x-K)^2}.$$

(*) La droite $x = K$ se presente évidemment comme une asymptote parallèle à l'axe des y et même, à cause de $(x - K)^2$, comme deux asymptotes réunies en une seule; d'où il suit qu'il ne peut y avoir plus de *deux* asymptotes non parallèles à l'axe des y.

Il suffit d'examiner ce qui arrive au-dessus de l'axe des x. J'appelle E, A′, A, D les points de Oz correspondant aux racines, K le point où la droite fixe coupe Ox, M le point où les asymptotes MP et MP′ coupent Ox.

x peut varier :

De $-\infty$ à $-e$: une branche de courbe, d'abord asymptote à MP′ et aboutissant en E;

De $-a$ à $+a$: courbe limitée allant de A′ en A et enveloppant l'ellipse, comme cela résulte de la comparaison des valeurs

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(a^2 - x^2)[b^2(x - K)^2 + L^2(a^2 - x^2)]}{a^2(x - K)^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \ldots; \end{aligned}$$

De d à $+\infty$: comme d est compris entre a et K, on a d'abord une branche partant du point D et qui vient être asymptote à la droite K, puis une branche qui commence par être asymptote à la droite K, et qui finit par être asymptote à la droite MP.

Remarque. — La droite MP rencontre évidemment en un seul point la branche qui part de D; comme cette droite est une asymptote, elle a avec la courbe deux points de rencontre à l'infini, il n'en reste donc que deux à distanee finie; je viens d'en signaler un. L'autre ne peut pas se trouver sur la portion *fermée* de la courbe qui va de A′ en A, car une droite rencontre une pareille courbe en deux points; il appartient nécessairement soit à la première, soit à la dernière de toutes les branches.

2° $K < a$. — On voit encore, par des substitutions, que $-e$ est comprise entre $-\infty$ et $-a$, et que d est comprise entre a et $+\infty$.

L'équation a la même forme que précédemment, et x peut varier dans les mêmes intervalles. Mais, comme K est plus petit que a, la branche qui part de A′ vient être asymptote à la droite K, puis de l'autre côté de cette droite part une branche qui, d'abord asymptote, aboutit en A.

Il est clair que, dans ce cas, les deux points de rencontre à distance finie de la courbe avec l'asymptote MP appartiennent respectivement aux deux branches dont je viens de parler.

Enfin la branche qui part du point D n'est plus asymptote qu'à la droite MP.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{(x+a)(x-a)[L^2(x+a)(x-a) - b^2(x-a)^2]}{a^2(x-a)^2}$$
$$= \frac{(x+a)[L^2(x+a) - b^2(x-a)]}{a^2}$$
$$= \frac{L^2 - b^2}{a^2}(x+a)\left(x + a\frac{L^2+b^2}{L^2-b^2}\right).$$

La courbe se réduit à une hyperbole qui coupe l'axe Ox aux points E et A′, et qui a pour asymptotes les deux droites MP et MP′.

2° $L^2 - b^2 = 0$.

Il n'y a plus d'asymptotes non parallèles à l'axe des y. L'équation devient

$$y^2 = \frac{(x^2-a^2)[b^2(x^2-a^2) - b^2(x-K)^2]}{a^2(x-K)^2}$$
$$= \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\frac{2Kx - a^2 - K^2}{(x-K)^2}$$
$$= \frac{2Kb^2}{a^2}\,\frac{(x+a)(x-a)\left(x - \dfrac{a^2+K^2}{2K}\right)}{(x-K)^2}.$$

La racine $-e$ disparaît, la racine d est toujours positive.

1° $K > a$. — On voit, par des substitutions, que d est comprise entre a et K.

x ne peut commencer à varier qu'entre $-a$ et a; on a la même forme de courbe que dans l'hypothèse correspondante du premier cas, seulement la première branche disparaît et la dernière n'a plus pour asymptote que la droite K.

2° $K < a$. — On voit, par des substitutions, que d est $> a$.

Résultats analogues.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}(x + a).$$

La courbe se réduit à une parabole qui coupe l'axe Ox au point A'.

$$3^\circ \quad L^2 - b^2 < 0.$$

Il n'y a plus d'asymptotes non parallèles à l'axe des y.

Dans ce cas les racines du trinôme du second degré ne sont pas nécessairement réelles; d'ailleurs, quand elles sont réelles, elles sont toutes deux de même signe et toutes deux positives.

1° $K > a$. — Les racines sont réelles, comme cela résulte de la forme (7) de $B^2 - AC$. On voit, par des substitutions, que la plus petite d est comprise entre a et K, comme la racine positive unique dans le cas de $L^2 - b^2 > 0$. La plus grande racine e est comprise entre K et $+\infty$.

L'équation peut s'écrire

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{\alpha^2}\frac{(x + a)(x - a)(x - d)(x - e)}{(x - K)^2}.$$

A cause de $L^2 - b^2 < 0$, x ne peut varier qu'entre $-a$ et $+a$; on a donc une courbe fermée entre A′ et A, puis deux branches infinies asymptotes à la droite K, l'une partant de D, l'autre aboutissant en E.

2° $K < a$. — Les racines ne sont pas nécessairement réelles.

Si $a^2 L^2 - b^2(a^2 - K^2) > 0$, les racines sont réelles et inégales, plus grandes que a : l'équation conserve la même forme que dans le premier cas.

On a d'abord deux branches infinies asymptotes à la droite K l'une partant de A′, l'autre aboutissant en A, puis une courbe fermée entre D et E.

Si $a^2 L^2 - b^2(a^2 - K^2) = 0$, la racine est double et plus grande que a, les deux points D et E se réunissent en un seul qui devient un point isolé de la courbe.

Si $a^2 L^2 - b^2(a^2 - K^2) < 0$, racines imaginaires.

3° $K = a$. — L'équation devient

$$y^2 = \frac{L^2 - b^2}{a^2}(x + a)\left(x - a\,\frac{b^2 + L^2}{b^2 - L^2}\right).$$

A cause de $L^2 - b^2 < 0$, la courbe est une ellipse comprise entre les points A′ et D.