Montcoq

Solution du problème proposé au concours d'agrégation de 1868

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 32-37
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__32_1>

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1868;

PAR M. MONTCOQ.

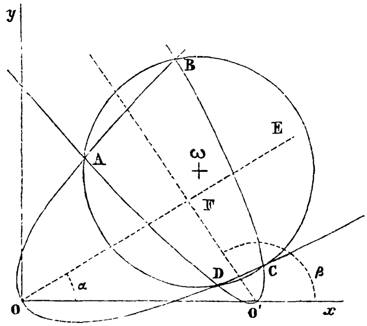
Je me propose de donner la solution du problème d'agrégation comme application facile d'un théorème sur les paraboles.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

Étant données dans un plan deux paraboles du deuxième degré, on les fait tourner autour de leurs sommets, supposés fixes, de manière que dans chacune de leurs positions, leurs quatre points d'intersection soient sur une circonférence, et l'on demande le lieu des centres de cette circonférence.

Soient (*fig.* 1) les deux paraboles BAODC, ADO'CB dans l'une des positions particulières répondant à la ques-

Fig. 1.



tion, x et y étant les coordonnées de l'un des points de la première avant sa rotation autour du sommet O, x' et y' ses coordonnées après avoir tourné de l'angle α; les formules de transformation sont

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

d'où

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$
$$y = y'\cos\alpha - x'\sin\alpha.$$

Si nous supposons que la deuxième, ayant d'abord son sommet en O, soit transportée parallèlement à elle-même de manière à avoir son sommet en O', OO' étant égal à a, et qu'elle tourne alors de l'angle β; x_1 et y_1 étant ses coordonnées primitives et x'' et y'' ses coordonnées après le double mouvement, les formules de transformation sont

$$x'' = a + x_1\cos\beta - y_1\sin\beta,$$
$$y'' = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta;$$

d'où

$$x_1 = x''\cos\beta + y''\sin\beta - a\cos\beta,$$
$$y_1 = y''\cos\beta - x''\sin\beta + a\sin\beta.$$

L'équation de la première parabole avant sa rotation est

$$y^2 = 2px;$$

celle de la deuxième, avant son double mouvement,

$$y_1 = 2p'x_1;$$

l'équation de la parabole BAODC est donc

$$(y'\cos\alpha - x'\sin\alpha)^2 = 2p\,(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha)$$

ou

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha \\ \qquad\qquad - 2px'\cos\alpha - 2py'\sin\alpha = 0, \end{array}\right.$$

et celle de la parabole ADO′CB

$$(y''\cos\beta - x''\sin\beta + a\sin\beta)^2 = 2p'(x''\cos\beta + y''\sin\beta - a\cos\beta)$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x''^2\sin^2\beta + y''^2\cos^2\beta - 2x''y''\sin\beta\cos\beta \\ \quad - 2x''(a\sin^2\beta + p'\cos^2\beta) \\ \quad - 2y''(p'\sin\beta - a\sin\beta\cos\beta) \\ \qquad\qquad + a^2\sin^2\beta + 2ap'\cos\beta = 0. \end{array}\right.$$

Si nous retranchons, membre à membre, l'équation (1) de l'équation (2) après avoir multiplié la première par λ et supprimé les accents, puisque les points d'intersection sont communs, il vient

$$\begin{array}{l} (\sin^2\beta - \lambda\sin^2\alpha)\,x^2 + (\cos^2\beta - \lambda\cos^2\alpha)\,y^2 \\ \quad - (2\sin\beta\cos\beta - 2\lambda\sin\alpha\cos\alpha)\,xy \\ \quad - 2(\alpha\sin^2\beta + p'\cos\beta - \lambda p\cos\alpha)\,x \\ \quad - 2(p'\sin\beta - a\sin\beta\cos\beta - p\lambda\sin\alpha)\,y \\ \qquad\qquad + a^2\sin^2\beta + 2ap'\cos\beta = 0. \end{array}$$

λ est indéterminé; nous pouvons donc le choisir de façon que l'équation représente une circonférence. Il suffit pour cela que le terme en xy soit nul et que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux, donc $\lambda = -1$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$; donc *les axes des paraboles sont rectangulaires*.

Si l'on fait $\lambda = -1$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ dans la dernière équation, elle devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 2(a\cos^2\alpha - p'\sin\alpha + p\cos\alpha)x \\ &\quad - 2(p'\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha)y \\ &\qquad + a^2\cos\alpha^2 - 2ap'\sin\alpha = 0. \end{aligned}\right.$$

ξ et η étant les coordonnées du centre de cette circonférence, elle a aussi pour équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$(4)\qquad x^2 + y^2 - \xi x - 2\eta y + \xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0.$$

Exprimant que les coefficients des équations (3) et (4) sont proportionnels, ou, simplement identifiant, puisque les coefficients des termes en x^2 et y^2 sont égaux à l'unité, on a

$$(5)\qquad \xi = a\cos^2\alpha - p'\sin\alpha + p\cos\alpha,$$

$$(6)\qquad \eta = p'\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha,$$

pour les coordonnées du centre en fonction de α.

Il suffirait d'éliminer α entre ces deux équations pour obtenir l'équation du lieu cherché; mais la recherche de ce lieu peut se faire d'une façon simple, élégante en s'appuyant sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque deux paraboles tournant autour de leurs sommets sont telles, que leurs quatre points d'in-*

tersection soient sur une circonférence variable, le centre est à l'intersection des deux lignes droites distantes extérieurement de chaque sommet du paramètre de l'autre parabole.

En effet, l'axe de la première parabole, ou la droite OE passant par l'origine et faisant avec l'axe x un angle α, est

$$y - x \tan\alpha = 0;$$

par suite, ωF distance à cette droite du centre de la circonférence dont les coordonnées sont ξ et η est

$$d = \frac{p'\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha + p\sin\alpha - \tan\alpha(a\cos^2\alpha - p'\sin\alpha + p\cos\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} \ (*)$$

ou

$$d = \frac{p'\cos^2\alpha + p'\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = p'.$$

Ainsi, comme nous l'avons énoncé, p' est la distance du centre de la circonférence variable à l'axe de la parabole dont le paramètre est p. Avec la même facilité on trouvera que p est la distance du centre de la circonférence à l'axe de la parabole dont le paramètre est p', ce qui démontre le théorème.

Le problème est donc ramené à un cas particulier de celui-ci :

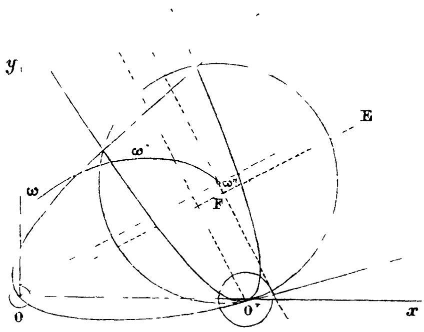
Quel est le lieu de l'intersection des tangentes à deux circonférences ayant pour centres O et O', et pour rayons respectifs p' et p, ces tangentes étant supposées toujours rectangulaires ?

C'est un cas particulier pour plusieurs raisons : d'abord,

(*) Nous prenons le radical avec le signe + pour que cette distance soit positive.

parce que si l'on veut avoir le problème d'agrégation, il ne faut prendre que les tangentes extérieures (*fig.* 2); une

Fig. 2.



autre raison : ces tangentes extérieures donnent une courbe continue au-dessus et au-audessous de la droite qui joint les points O et O', tandis que dans le problème d'agrégation, on ne cherche qu'une partie de cette courbe; le lieu des points satisfaisant à la question s'arrête brusquement en deux points dont chacun répond au maximum ou au minimum de la circonférence. Ainsi (*fig.* 2) $\omega\omega'\omega''$ représente, d'un côté de OO', toute la courbe lieu des centres des circonférences. La courbe commence donc brusquement en ω, et s'arrête brusquement en ω''. Le premier point correspond au minimum de cette circonférence et le deuxième au maximum.

Le point ω'' correspond à la circonférence maxima. On obtient ce point en faisant passer, par le sommet de l'autre, un point de la parabole ayant *le plus grand paramètre.*

Il est évident que le lieu $\omega\omega'\omega''$ a son symétrique par rapport à OO'.