Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 274-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__274_1>

QUESTIONS.

936. En multipliant $(x^2 - 1)^n$ par la série

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots,$$

la partie entière du produit sera le polynôme

$$F(x) = x^{2n-1} - \left(n - \frac{1}{3}\right)x^{2n-3} + \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{3} + \frac{1}{5}\right]x^{2n-5} - \ldots,$$

à l'égard duquel on propose de démontrer :

1° Que l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires, sauf la racine $x = 0$, quand le nombre n est pair ;

2° Qu'en supposant n impair, elle n'admet, outre la racine nulle, que deux racines réelles égales et de signes contraires, dont la valeur absolue, supérieure à l'unité, est moindre que $\sqrt{2}$ et converge vers cette limite lorsque le nombre n augmente. (HERMITE.)

937. Une ellipse roule sur une autre ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes.

(Dauplay.)

938. Deux ellipses sont situées dans le même plan, l'une est fixe et l'autre mobile autour de son centre. Dans chaque position de l'ellipse mobile, on mène les tangentes communes. On demande le lieu des points de rencontre.

Quand les ellipses sont extérieures, il y a deux tangentes extérieures et deux tangentes intérieures. Trouver le lieu des points de rencontre des premières tangentes et le lieu des points de rencontre des secondes. Examiner les cas particuliers. (Dauplay.)

939. Étant donné un contour polygonal fermé de $2n$ côtés inscrit dans une conique, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la conique sur les côtés de rang pair est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées du même point sur tous les côtés de rang impair. (Chasles.)

940. Étant donnés n points sur un cercle, on peut trouver $3.4\ldots(n-1)$ contours polygonaux fermés de n côtés ayant ces points pour sommets. Si, d'un même point du cercle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de tous ces contours, le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un contour quelconque est le même pour tous les contours. (Désiré André.)

941. Tout nombre pair est égal à un cube qui n'est pas nul plus trois carrés. (Désiré André.)

942. Un cube parfait augmenté de 7 unités d'un ordre quelconque ne peut pas être un carré parfait.

(Joffroy.)

943. Une courbe plane c roule sur une courbe fixe C, située dans le même plan, en entraînant un point mobile qui décrit alors une courbe b. A un instant donné, les deux courbes se touchent en A, et le point mobile étant en M, la courbe c s'arrête brusquement et la courbe C commence au contraire à rouler sur la première en entraînant le point M suivant une courbe B. Démontrer que les centres de courbure des deux courbes b et B, au point commun M, divisent harmoniquement la longueur MA.

(Laisant.)

944. Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes a et b sont liés par la relation $ab =$ const. On demande :

1° Les lieux des points d'intersection ;

2° Le lieu des milieux des tangentes communes.

945. Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$
$$= 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1),$$
$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$
$$+ (\cos A + \cos B + \cos C - 1)^2$$
$$= 4(\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B).$$

(J.-Ch. Dupain.)

946. Soient (A) et (A′) deux surfaces dont l'une est la transformée de l'autre par rapport à un pôle O, c'est-à-dire que les points correspondants de ces surfaces se trouvent sur une même droite passant par le point fixe O. On demande de démontrer :

1° Que dans ce mode de transformation les surfaces liées par la relation

$$f(r, r) = 0,$$

où f est une fonction quelconque des distances $OM = r$, $OM' = r'$, jouissent seules de la propriété que leurs normales aux points correspondants se rencontrent en un même point de l'espace : comme une des applications, on peut considérer les surfaces conchoïdes $r - r' = \pm$ const.;

2° Que parmi les transformations définies par la relation générale $f(r, r') = 0$, il n'y a que l'homothétie et l'inversion qui jouissent de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure des surfaces transformées.

(E. Habich.)

947. Étant donnée la série

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots,$$

convergente pour une valeur finie quelconque réelle ou imaginaire de z, on pose l'équation

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots = A,$$

A étant un nombre donné. Démontrer que la différence entre deux racines quelconques z_1 et z_2 de cette équation est supérieure à une quantité fixe qui dépend de A et des coefficients $C_0, C_1, C_2 \ldots$.

(Fr. Piccioli, de Pavie.)

948. L'aire d'un polygone de m côtés est égale à la *somme* des $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ triangles que l'on peut former avec $m - 1$ de ses côtés combinés deux à deux; chacun de ces triangles ayant deux de ses côtés égaux aux côtés correspondants du polygone et dirigés de la même manière. (G. Bellavitis.)