

PARPAITE

Note sur la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8 (1869), p. 269-272

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__269_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES ;

PAR M. PARPAITE,

Élève à l'École Normale supérieure.

On sait que si une équation algébrique mise sous la forme ordinaire renferme trois termes consécutifs

$$A_{n+1} x^{n+1}, \quad A_n x^n, \quad A_{n-1} x^{n-1},$$

dont les coefficients soient les termes consécutifs d'une progression géométrique, elle a au moins deux racines imaginaires. On démontre ce théorème en multipliant le premier membre de l'équation par $(x - a)$ et en profitant de l'indétermination de a pour produire des lacunes dans l'équation $f(x)(x - a) = 0$.

Cherchons si en multipliant le premier membre de l'équation par un polynôme du deuxième degré, on pourrait profiter de l'indétermination des coefficients pour amener des lacunes dans le produit résultant ; quelles conditions les coefficients de l'équation doivent remplir pour cela ; quelles conclusions on peut en tirer pour le nombre des racines imaginaires.

Soit l'équation donnée

$$0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_n x^{m-n} + A_{n+1} x^{m-n-1} + \dots$$

multiplions par

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Trois termes consécutifs du produit seront :

$$\begin{aligned} & (A_{n+2} \alpha + A_{n+1} \beta + A_n \gamma) x^{m-n}, \\ & + (A_{n+3} \alpha + A_{n+2} \beta + A_{n+1} \gamma) x^{m-n-1}, \\ & + (A_{n+4} \alpha + A_{n+3} \beta + A_{n+2} \gamma) x^{m-n-2}. \end{aligned}$$

Ces trois termes consécutifs disparaîtront si l'on a

$$\begin{aligned} A_{n+2} \alpha + A_{n+1} \beta + A_n \gamma &= 0, \\ A_{n+3} \alpha + A_{n+2} \beta + A_{n+1} \gamma &= 0, \\ A_{n+4} \alpha + A_{n+3} \beta + A_{n+2} \gamma &= 0. \end{aligned}$$

On voit qu'il sera possible de choisir α , β , γ dans un rapport tel, que ces trois équations soient satisfaites simultanément, si l'on a

$$D_n = \begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & A_{n+2} \\ A_{n+1} & A_{n+2} & A_{n+3} \\ A_{n+2} & A_{n+3} & A_{n+4} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, étant donnée une équation $f(x) = 0$, que l'on forme les divers déterminants D_n , si l'un au moins est nul, on peut faire disparaître trois termes consécutifs de l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$.

Cela posé, on calculera les rapports des inconnues α, β, γ ; on en déduira les valeurs des coefficients de x^{m-n+1} et de x^{m-n+3} ; on peut facilement les mettre sous la forme de déterminants, à un facteur près : nous ne nous y arrêterons pas.

Si les coefficients de ces puissances sont de signes contraires, l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a au moins deux racines imaginaires; il faudra voir si les valeurs de α, β, γ rendent les racines de $\varphi(x)$ réelles ou imaginaires avant de tirer une conclusion relative à l'équation $f(x) = 0$.

Si les coefficients de ces puissances sont de même signe, on peut affirmer que l'équation $f(x)\varphi(x) = 0$ a quatre racines imaginaires au moins, par suite que l'équation $f(x) = 0$ en a au moins deux.

Nous nous appuyons sur ce théorème bien connu, qui découle de la règle des signes de Descartes :

Une équation a au moins $2n$ racines imaginaires :

1° *Si entre deux termes il en manque $2n$;*

2° *Si entre deux termes de signes contraires il en manque $2n + 1$;*

3° *Si entre deux termes de même signe il en manque $2n - 1$.*

Note du Rédacteur. — On peut évidemment étendre ces considérations au cas où $\varphi(x)$ serait du troisième, du quatrième degré, etc. On arriverait ainsi à une série de transformations qui permettraient de juger, par les lacunes produites, du nombre des racines imaginaires de l'équation.

Nous nous arrêterons à cette indication, à cause de la complication des énoncés.

La règle de M. Parpaite est d'ailleurs très-particulière et d'une application peu fréquente, car il arrivera très-rarement que cinq coefficients consécutifs satisfassent à la relation $D_n = 0$.
