NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DOUCET

Note sur un caractère de convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 266-269

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__266_1>

NOTE SUR UN CARACTÈRE DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. DOUCET,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur au lycée de Lyon.

Dans le *Traité d'Algèbre* de M. Laurent (p. 299), on trouve, sans démonstration, le théorème suivant :

La série

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+2}} + \ldots$$

est convergente si la quantité

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

est constante ou croissante.

La démonstration de ce théorème est des plus simples. Posons

$$u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n = \mathrm{A},$$

et supposons d'abord cette quantité positive et constante. Soit d'ailleurs

$$u_1 - u_0 = h.$$

On a les égalités

$$\begin{aligned}
u_1 - u_0 &= h,\\
u_2 - u_1 &= h + \mathrm{A},\\
u_3 - u_2 &= h + 2\,\mathrm{A},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n - u_{n-1} &= h + (n-1)\,\mathrm{A}.\\
u_{n+1} - u_n &= h + n\,\mathrm{A},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

On en déduit

$$u_n = u_0 + nh + \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{A},$$

$$u_{n+1} = u_0 + (n+1)\,h + \frac{(n+1)\,n}{2}\,\mathrm{A}.$$

Le rapport $\dfrac{\frac{1}{u^{n+1}}}{\frac{1}{u^n}}$ d'un terme de la série au précédent a pour limite l'unité; mais si l'on met ce rapport sous la forme $\dfrac{1}{1+\alpha}$, on trouve

$$\alpha = \frac{h + n\mathrm{A}}{u_0 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{A}},$$

de sorte que $n\alpha$ tend vers la limite 2. La série est donc convergente.

La convergence aurait lieu *à fortiori* si la quantité A était croissante. Si l'on forme, en effet, dans cette hypothèse, une série commençant par les trois premiers termes de la précédente, il est clair qu'à partir de là la nouvelle série aura tous ses termes plus petits que ceux de même rang dans la première.

Il est à peine nécessaire d'examiner le cas où la quantité A serait constante et négative. A partir d'un certain rang, les termes de la série deviennent négatifs, et si l'on ne tient compte que de leur valeur absolue, on rentre dans le premier cas. On rentrerait dans le second si la quantité A, d'abord négative, croissait en valeur absolue.

Il ne reste qu'une place pour la divergence; c'est le cas où A, d'abord positive ou négative, s'approche de zéro indéfiniment. La convergence serait encore assurée, si la valeur absolue de A restait supérieure à une limite fixe différente de zéro.

On constate d'ailleurs facilement la divergence si $A = 0$. En effet la somme

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 + h} + \frac{1}{u_0 + 2h} + \ldots$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{u_0}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{h}{u_0}} + \frac{1}{1 + \frac{2h}{u_0}} + \ldots\right);$$

et si l'on a $h < u_0$, ce qu'on peut toujours supposer, la série entre parenthèses a ses termes plus grands que ceux de la série harmonique. Elle est donc divergente.

Le caractère de convergence indiqué par M. Laurent, d'après M. Lemoine, semble être d'une utilité réelle. On peut étudier la quantité A elle-même, ou mieux sa dérivée, qui doit être, dans le cas de convergence, nulle ou positive. J'ai examiné quelques exemples de séries dont la nature reste incertaine après l'essai des caractères indiqués ordinairement dans les éléments. Ces expériences, qui n'ont pas un degré d'intérêt suffisant pour être rapportées ici, ont réussi généralement.