

HOUSEL

**Axes des surfaces du second degré obtenus
par une sphère concentrique**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 260-265

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8_260_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**AXES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ OBTENUS
PAR UNE SPHÈRE CONCENTRIQUE;**

PAR M. HOUSEL.

I. Quoique la surface ait un centre, nous la représen-
terons d'abord par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

parce que les calculs qui vont suivre s'appliqueront même
aux surfaces dépourvues de centre.

L'équation d'un plan tangent à cette surface en un
point qui a pour coordonnées x', y', z' sera

$$x(Ax' + B'z' + B''y' + C) + y(A'y' + Bz' + B''x' + C') \\ + z(A''z' + By' + B''x' + C'') + Cx' + C'y' + C''z' + D = 0.$$

Une sphère concentrique à la surface et de rayon R
aura pour équation, en indiquant par x_0, y_0, z_0 les coor-
données du centre,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(y - y_0)(z - z_0) \cos yz \\ + 2(x - x_0)(z - z_0) \cos xz + 2(x - x_0)(y - y_0) \cos xy = R^2.$$

Si le point donné est commun à la surface et à la
sphère, l'équation du plan tangent à la sphère en ce
point, en prenant les dérivées de $x - x_0, y - y_0, z - z_0,$

comme si c'étaient les variables elles-mêmes, sera

$$\begin{aligned} & (x - x_0)[x' - x_0 + (z' - z_0) \cos xz + (y' - y_0) \cos xy] \\ & + (y - y_0)[y' - y_0 + (z' - z_0) \cos yz + (x' - x_0) \cos xy] \\ & + (z - z_0)[z' - z_0 + (y' - y_0) \cos yz + (x' - x_0) \cos yz] = R^2. \end{aligned}$$

II. Si ce plan coïncide avec le plan tangent à la surface en ce même point, il est perpendiculaire au rayon central, qui devient, par conséquent, un *axe principal*.

Pour établir cette coïncidence, il faut chercher à mettre en évidence, dans l'équation du plan tangent à la surface, les facteurs $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, au lieu de x , y et z . Cette équation s'écrira donc

$$\begin{aligned} & (x - x_0)(A x' + B' z' + B'' y' + C) \\ & + (y - y_0)(A' y' + B z' + B'' x' + C') \\ & + (z - z_0)(A'' z' + B y' + B'' x' + C'') \\ & \quad + x_0(A x' + B' z' + B'' y' + C) \\ & \quad + y_0(A' y' + B z' + B'' x' + C') \\ & \quad + z_0(A'' z' + B y' + B'' x' + C'') \\ & \quad + C x' + C' y' + C'' z' + D = 0. \end{aligned}$$

En mettant de côté les termes affectés des facteurs $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, les termes suivants se combinent de la manière que voici :

$$\begin{aligned} & x'(A x_0 + B'' y_0 + B' z_0 + C) + y'(A' y_0 + B'' x_0 + B z_0 + C') \\ & \quad + z'(A'' z_0 + B' x_0 + B y_0 + C'') = 0, \end{aligned}$$

puisque le point (x_0, y_0, z_0) représente le centre.

Il reste donc l'équation

$$\begin{aligned} & (x - x_0)(A x' + B' z' + B'' y' + C) \\ & + (y - y_0)(A' y' + B z' + B'' x' + C') \\ & + (z - z_0)(A'' z' + B y' + B'' x' + C'') = 0. \end{aligned}$$

Pour l'identifier avec celle du plan tangent à la sphère,

on posera

$$\begin{aligned} & \frac{Ax' + B'z' + B''y' + C}{-D} \\ &= \frac{x' - x_0 + (z' - z_0) \cos xz + (y' - y_0) \cos xy}{R^2}, \\ & \frac{A'y' + Bz' + B''x' + C'}{-D} \\ &= \frac{y' - y_0 + (z' - z_0) \cos yz + (x' - x_0) \cos xy}{R^2}, \\ & \frac{A''z' + By' + B'x' + C''}{-D} \\ &= \frac{z' - z_0 + (y' - y_0) \cos yz + (x' - x_0) \cos xz}{R^2}. \end{aligned}$$

III. Ces équations se modifient si l'on pose aussi, dans les premiers membres,

$$x' = (x' - x_0) + x_0, \quad y' = (y' - y_0) + y_0, \quad z' = (z' - z_0) + z_0.$$

Alors

$$Ax' + B'z' + B''y' + C = A(x' - x_0) + B'(z' - z_0) + B''(y' - y_0),$$

puisque

$$Ax_0 + B'z_0 + B''y_0 + C = 0.$$

Il en est de même pour les autres dérivées.

IV. Cette transformation étant supposée faite, divisons les deux termes de chaque égalité par $z' - z_0$, et indiquons par $\mu = \frac{x' - x_0}{z' - z_0}$, $\nu = \frac{y' - y_0}{z' - z_0}$ les coefficients angulaires du rayon central, les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} & \frac{A\mu + B' + B''\nu}{-D} = \frac{\mu + \cos xz + \nu \cos xy}{R^2}, \\ & \frac{A'\nu + B + B''\mu}{-D} = \frac{\nu + \cos yz + \mu \cos xy}{R^2}, \\ & \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{-D} = \frac{1 + \nu \cos yz + \mu \cos xz}{R^2}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire les équations

$$\begin{aligned} -\frac{D}{R^2} &= \frac{A\mu + B' + B''\nu}{\mu + \cos xz + \cos xy} \\ &= \frac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \cos yz + \mu \cos xz} = \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \nu \cos yz + \mu \cos xz} = s, \end{aligned}$$

ce qui donne μ et ν en fonction de s , et aussi l'équation en s .

Ces relations étant connues, il nous suffira de rappeler cette équation en s qui s'en déduit par élimination :

$$\begin{aligned} & s^3(1 - \cos^2 zy - \cos^2 zx - \cos^2 xz + 2 \cos zy \cos xz \cos xy) \\ & - s^2 [A \sin^2 yz + A' \sin^2 xz + A'' \sin^2 xy \\ & \quad - 2B''(\cos xy - \cos xz \cos yz) \\ & \quad - 2B'(\cos xz - \cos xy \cos zy) \\ & \quad - 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz)] \\ & - s[B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'' \\ & \quad + 2 \cos yz(AB - B'B'') \\ & \quad + 2 \cos xz(A'B' - BB'') + 2 \cos xy(A''B'' - BB')] \\ & + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0. \end{aligned}$$

V. *Relations entre les axes et les diamètres conjugués.* — Soient s_1, s_2, s_3 les racines de cette équation, et R_1^2, R_2^2, R_3^2 les carrés des demi-axes principaux. Comme ces demi-axes sont les rayons des sphères concentriques dont nous avons parlé, on aura

$$R_1^2 = -\frac{D}{s_1}, \quad R_2^2 = -\frac{D}{s_2}, \quad R_3^2 = -\frac{D}{s_3}.$$

Considérons, pour fixer les idées, l'équation

$$\bullet \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

d'un ellipsoïde rapporté à un système de diamètres con-

jugés. On a alors, dans l'équation de la surface, tous les coefficients nuls, excepté $A = \frac{1}{a'^2}$, $A' = \frac{1}{b'^2}$, $A'' = \frac{1}{c'^2}$ et $D = -1$, d'où $s = \frac{1}{R^2}$. Alors l'équation en s devient, en posant

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= 1 - \cos^2 yz - \cos^2 xz - \cos^2 xy + 2 \cos yz \cos xz \cos xy, \\ \frac{\varepsilon^2}{R^6} - \frac{1}{R^4} \left(\frac{\sin^2 yz}{a'^2} + \frac{\sin^2 xz}{b'^2} + \frac{\sin^2 xy}{c'^2} \right) \\ &+ \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{a'^2 b'^2} + \frac{1}{a'^2 c'^2} + \frac{1}{b'^2 c'^2} \right) - \frac{1}{a'^2 b'^2 c'^2} = 0. \end{aligned}$$

Multiplions par $R^6 a'^2 b'^2 c'^2$ et changeons les signes, il vient

$$\begin{aligned} R^6 - R^4 (a'^2 + b'^2 + c'^2) \\ + R^2 (b'^2 c'^2 \sin^2 yz + a'^2 c'^2 \sin^2 xz + a'^2 b'^2 \sin^2 xy) \\ - \varepsilon^2 a'^2 b'^2 c'^2 = 0. \end{aligned}$$

On en conclut immédiatement les relations suivantes :

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2, \quad R_1 R_2 R_3 = \varepsilon a' b' c',$$

et

$$\begin{aligned} R_2^2 R_3^2 + R_1^2 R_3^2 + R_1^2 R_2^2 \\ = b'^2 c'^2 \sin^2 yz + a'^2 c'^2 \sin^2 xz + a'^2 b'^2 \sin^2 xy. \end{aligned}$$

VI. Les équations du § II se mettent sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{A x' + B' z' + B'' y' + C}{x' - x_0 + (z' - z_0) \cos xz + (y' - y_0) \cos xy} \\ = \frac{A' y' + B z' + B'' x' + C'}{y' - y_0 + (z' - z_0) \cos yz + (x' - x_0) \cos xy} \\ = \frac{A'' z' + B y' + B' x' + C''}{z' - z_0 + (y' - y_0) \cos yz + (x' - x_0) \cos xz}. \end{aligned}$$

Divisant tous les dénominateurs par $z' - z_0$, il reste

$$\frac{Ax' + Bz' + B''y' + C}{\mu + \cos xz + \nu \cos xy} \\ = \frac{A'y' + Bz' + B''x' + C'}{\nu + \cos yz + \mu \cos xy} = \frac{A''z' + By' + B'x' + C''}{1 + \nu \cos yz + \mu \cos xz}.$$

VII. *Paraboloïdes.* — Ces dernières formules s'appliquent à un paraboloïde : μ et ν sont les coefficients angulaires d'un diamètre, x', y', z' étant les coordonnées du sommet, qui est le seul point où le plan tangent soit perpendiculaire à un diamètre.

Pour déterminer le sommet d'après ces formules, voir *Nouvelles Annales*, 1861, p. 307 et suiv.
