J. MOUTIER

Sur les principes fondamentaux de l'hydrostatique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 241-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__241_0>

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDROSTATIQUE;

PAR M. J. MOUTIER.

1. *Définitions.* — Soit un liquide contenu dans un vase fermé par un piston mobile; si l'on exerce normalement un effort déterminé sur la base du piston, le piston se fixe dans une position d'équilibre. La force appliquée normalement à la base du piston sera, par définition, la pression exercée sur le liquide en équilibre par le piston; la pression du liquide sur la base du piston sera, également par définition, une force égale et contraire à la première (*).

Une paroi plane quelconque S appartenant au vase peut être assimilée à la base du piston mobile et supporte une pression P, qui, par définition, est normale à cette surface. Une force égale et contraire à P représente l'effort qu'il faudrait exercer normalement sur la surface S pour maintenir en équilibre cette paroi supposée libre.

On ne sait *à priori* comment cette pression P est répartie sur la surface S. Si cette pression était répartie uniformément sur la surface S, la pression sur l'unité de

(*) On dit quelquefois que si la pression exercée par un liquide en équilibre sur une paroi n'était pas normale à la paroi, elle pourrait se décomposer en deux autres, l'une normale, l'autre tangente à la paroi, et que cette dernière composante aurait pour effet de deplacer les molécules liquides. Quelle que soit la forme du raisonnement employé, on ne peut démontrer que la pression est normale à la paroi, qu'après avoir défini préalablement la pression exercée par un liquide en équilibre. La notion de pression s'acquiert, il est vrai, très-facilement, mais une définition précise de la pression n'en est pas moins indispensable, lorsqu'on se propose d'établir des théorèmes sur les pressions. La définition adoptée ici est indépendante de toute hypothèse sur la constitution des fluides.

surface serait $\frac{P}{S}$; quelle que soit la distribution de la pression P sur la surface S, $\frac{P}{S}$ est la pression supportée en moyenne par l'unité de surface, et s'appellera la pression moyenne sur l'unité de surface de la paroi S, ou, d'une manière abrégée, la pression moyenne sur la paroi S.

Si l'on conçoit que l'aire de la paroi S diminue indéfiniment autour d'un point M, la pression moyenne tend vers une certaine limite, que nous appellerons la pression sur l'unité de surface au point M, ou, plus simplement, la pression au point M. Un point ne peut supporter de pression; mais on peut concevoir un élément géométrique superficiel ω autour du point M, cet élément supporte une pression p que l'on peut appeler la pression élémentaire, et on peut écrire indistinctement pour la pression au point M : Lim $\left(\frac{P}{S}\right)$ ou $\frac{p}{\omega}$. Par abréviation, nous représenterons également la pression en un point par ϖ et nous écrirons indistinctement

$$\text{Lim}\left(\frac{P}{S}\right) = \frac{p}{\omega} = \varpi.$$

La définition précédente s'étend à un point pris sur une paroi courbe; l'élément ω appartient alors au plan tangent à la paroi au point considéré.

La même définition s'étend également aux points pris à l'intérieur du liquide; il suffit d'imaginer une surface passant par le point pris à l'intérieur du liquide, le partageant en deux parties, et de considérer le point en question comme appartenant à cette paroi.

2. Le but principal de l'hydrostatique est de déterminer les relations qui existent entre les pressions aux divers points de la paroi ou de l'intérieur du liquide, et les forces qui agissent sur le liquide; nous considérerons d'abord les liquides soumis uniquement à l'action de la pesanteur.

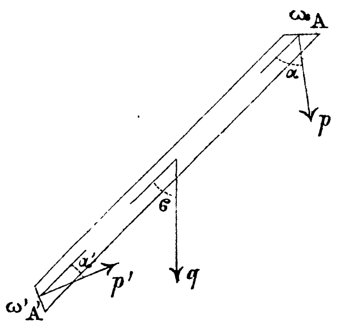
La théorie de l'équilibre des liquides pesants peut se déduire tout entière d'une remarque fort ancienne, qui sert à établir dans tous les Traités de Physique le principe d'Archimède :

Si l'on considère une portion quelconque du liquide en équilibre, les pressions exercées par le liquide environnant sur les divers éléments de la surface qui limite cette masse liquide font équilibre au poids du liquide.

On peut déduire de là tous les principes de l'hydrostatique, en choisissant convenablement la forme de la masse liquide en équilibre.

3. Imaginons un filet cylindrique, c'est-à-dire un cylindre dont les dimensions transversales soient infiniment petites par rapport aux dimensions longitudinales,

Fig. 1.



et supposons ce cylindre limité par deux plans inclinés d'une manière quelconque par rapport aux génératrices. Soient ω, ω' les deux bases du filet cylindrique (*fig.* 1);

p, p' les pressions qu'elles supportent de la part du liquide environnant, et q le poids du liquide renfermé à l'intérieur du filet.

Les pressions exercées par le liquide environnant sur les bases ω, ω' et sur les divers éléments de la surface latérale du cylindre font équilibre au poids du liquide. D'après un théorème de mécanique bien connu, la somme algébrique des projections des forces de ce système en équilibre sur une direction quelconque est nulle; or, si l'on prend pour direction celle des génératrices du cylindre, toutes les pressions élémentaires relatives à la surface latérale du cylindre ont des projections nulles sur cette direction, la somme algébrique des projections des trois forces p, p', q sur cette direction est donc nulle. Par suite, si l'on appelle α, α', β, les angles aigus formés par ces trois forces avec une direction parallèle aux génératrices du cylindre, on a, en tenant compte de la direction des forces,

$$p \cos\alpha + q \cos\beta - p' \cos\alpha' = 0.$$

Le volume du filet cylindrique est égal au volume d'un cylindre ayant pour base la section droite σ du filet et pour hauteur la ligne qui joint les centres de gravité A, A' des deux bases, et qui est parallèle aux génératrices du cylindre. Si l'on désigne par d le poids de l'unité de volume du liquide supposé homogène,

$$q = \sigma l d.$$

D'ailleurs la section droite σ du filet peut être considérée comme la projection de l'une ou l'autre des bases ω, ω', et, d'après une propriété géométrique bien connue,

$$\sigma = \omega \cos\alpha, \quad \sigma = \omega' \cos\alpha'.$$

Si l'on reporte dans la première équation les valeurs de q, cos α, cos α', on obtient, après réduction évidente,

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + l\cos 6.d.$$

Or $l \cos 6$ est la différence de niveau des points A, A'; en la désignant par z, il vient définitivement

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + zd, \tag{1}$$

ou encore, en posant $\frac{p'}{\omega'} = \varpi'$, $\frac{p}{\omega} = \varpi$,

$$\varpi' = \varpi + zd.$$

4. Plusieurs conséquences se déduisent de cette relation :

1° Le rapport $\frac{p'}{\omega'} = \varpi'$ est indépendant de la direction de l'élément ω'; par suite, la pression au point A' est indépendante de l'orientation de l'élément ω'. Ainsi, en général, la pression en un point pris à l'intérieur du liquide en équilibre est indépendante de l'orientation de l'élément que l'on suppose mené par ce point; en d'autres termes, la pression supportée par un élément de surface pris à l'intérieur d'un liquide en équilibre est indépendante de l'orientation de cet élément.

2° La différence des pressions en deux points pris à l'intérieur d'un liquide est égale au poids d'une colonne liquide, ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la différence de niveau des deux points.

3° La pression est la même en deux points d'un même plan horizontal.

4° Si l'on appelle surface de niveau le lieu géométrique des points où la pression est la même, dans un liquide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux. En effet, pour deux points d'une même surface de niveau on a par définition $\varpi' = \varpi$; d'après la relation (1), la différence de niveau z des deux points doit être nulle.

Ces diverses conséquences de la relation (1) peuvent s'énoncer de plusieurs autres manières. Supposons par exemple les deux éléments ω, ω' égaux entre eux,

$$p' = p + \omega z d.$$

On voit que la différence des pressions supportées par deux éléments égaux menés à l'intérieur du liquide est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base l'un des éléments et pour hauteur la différence de niveau des deux éléments, et par suite deux éléments égaux pris sur un même plan horizontal supportent des pressions égales.

5. La relation (1) peut s'étendre aisément au cas où la ligne AA', qui joint deux points quelconques, n'est pas située entièrement à l'intérieur du liquide. Dans ce cas, on peut toujours aller du point A au point A', en suivant une ligne brisée entièrement située à l'intérieur du liquide; il suffit alors d'écrire la relation (1) pour les sommets successifs de ce contour polygonal pour généraliser cette relation.

6. Une relation analogue s'applique à deux parois planes finies situées d'une manière quelconque dans le liquide.

Considérons en effet une paroi plane S et sur cette paroi un élément superficiel ω supportant la pression p; imaginons un plan horizontal arbitraire xy mené à l'intérieur du liquide, et appelons ϖ la pression en un point de ce plan, z la distance de l'élément ω au plan xy.

D'après la relation (1)

$$\frac{p}{\omega} = \varpi + zd,$$

ou

$$p = \varpi\omega + \omega zd.$$

Les pressions élémentaires p ont une résultante P égale à leur somme :

$$P = \varpi S + d\Sigma\omega z.$$

Or, si l'on appelle Z la distance du centre de gravité de la surface S au plan xy, on sait que

$$\Sigma\omega z = SZ,$$

et par suite

$$P = \varpi S + dSZ,$$

ou

$$\frac{P}{S} = \varpi + Zd.$$

Si l'on appelle P′ la pression supportée par une seconde paroi plane d'étendue S′, dont le centre de gravité soit à une distance Z′ du plan xy, on a de même

$$\frac{P'}{S'} = \varpi + Z'd,$$

et, en éliminant ϖ entre ces deux relations,

$$\frac{P'}{S'} = \frac{P}{S} + d(Z' - Z). \tag{2}$$

Cette relation a la même forme que la première et conduit, par conséquent, à des conséquences analogues; la pression en un point est remplacée ici par la pression moyenne sur l'unité de surface.

7. Si l'on suppose les centres de gravité des deux parois planes situés sur un même plan horizontal, ou si

l'on néglige la différence de pression due à la différence de niveau $Z - Z'$, la relation (2) se réduit à

$$\frac{P'}{S'} = \frac{P}{S}.$$

Les pressions exercées par le liquide sont proportionnelles aux surfaces ; c'est le principe de Pascal, ou de la transmission des pressions.

Pascal l'énonce ainsi, au commencement du second chapitre du *Traité de l'équilibre des liqueurs :* « Si un vaisseau plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures, l'une centuple de l'autre ; en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront celui qui est cent fois plus large et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf.

» Et, quelque proportion qu'aient ces ouvertures, si les forces qu'on mettra sur les pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre. D'où il paraît qu'un vaisseau plein d'eau est un nouveau principe de mécanique et une machine nouvelle pour multiplier les forces à tel degré que l'on voudra.... »

La mesure directe des forces P, P' ne peut être réalisée expérimentalement à cause des frottements considérables des pistons contre les parois des tuyaux ; aussi Pascal fait-il suivre de trois démonstrations théoriques l'énoncé du principe qui lui sert à expliquer les propriétés des liquides en équilibre.

« Et l'on doit admirer qu'il se rencontre en cette machine nouvelle cet ordre constant qui se trouve en toutes les anciennes, savoir : le levier, le tour, la vis sans fin, et qui est, que le chemin est augmenté en même proportion que la force... » A l'exemple de Galilée, Pascal applique ici le principe des vitesses virtuelles, sur lequel Lagrange a établi plus tard l'hydrostatique tout entière. Pascal donne ensuite une seconde démonstration : « On peut encore ajouter, pour plus grand éclaircissement,... » et bientôt une troisième : « Voici encore une preuve qui ne peut être entendue que par les seuls géomètres..... »

On voit, d'après ce qui précède, que le principe de Pascal peut également se déduire des considérations simples sur lesquelles on s'appuie ordinairement pour établir le principe d'Archimède. Les raisonnements précédents s'appliquent à la fois aux liquides et aux gaz en équilibre; les liquides peuvent être terminés par une surface libre.

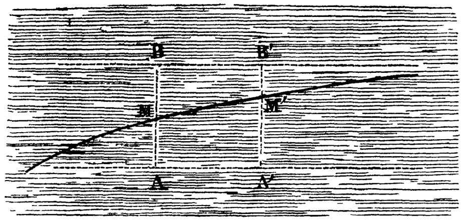
8. *Surface libre d'un liquide pesant.* — Si le vide est fait au-dessus du liquide, la pression est nulle en tous les points de sa surface; si le liquide supporte la pression constante de l'atmosphère, la pression est supposée la même en tous les points de la surface libre, et dans ces deux cas la surface libre est une surface de niveau, et, par suite, elle est horizontale (n° 4). Cette propriété étant indépendante, comme tout ce qui précède, de la forme des vases, il n'y a pas lieu de distinguer le cas où un même liquide serait contenu dans les vases qu'on appelle *vases communiquants.*

D'une manière plus générale, lorsqu'un liquide et un gaz sont superposés, la surface de séparation, comme on va le voir, est horizontale.

9. *Liquides superposés.* — Lorsque deux liquides de densité différente se superposent sans se mélanger ou réagir chimiquement l'un sur l'autre, la surface de séparation des deux liquides est un plan horizontal.

Soient MM′ (*fig.* 2) la surface de séparation des deux liquides, AA′ un plan horizontal mené à l'intérieur du liquide inférieur, BB′ un second plan horizontal mené dans le liquide supérieur à une distance h du premier. Prenons deux points A, A′ sur le premier plan; élevons en ces deux points des perpendiculaires jusqu'à leur rencontre avec le second plan BB′; appelons z, z' les distances AM,

Fig. 2.



A′M′; d, d' les poids de l'unité de volume des deux liquides inférieur et supérieur; ϖ, ϖ' les pressions aux points A, A′; φ, φ' les pressions aux points B, B′; d'après ce qui précède,

$$\varpi = \varphi + zd + (h - z)d',$$
$$\varpi' = \varphi' + z'd + (h - z')d'.$$

Mais les points A, A′ étant pris à l'intérieur du même liquide, $\varpi = \varpi'$; par la même raison, $\varphi = \varphi'$, en retranchant les deux équations

$$(z - z')(d' - d) = 0.$$

Par hypothèse, d est différent de d'; donc $z = z'$. Le même raisonnement s'applique à un liquide et à un gaz superposés.

10. *Pression sur une paroi plane.* — Si l'on suppose dans la relation (2) $P' = 0$, $Z' = 0$, on obtient immédiatement $P = SdZ$ pour la valeur de la pression exercée par un liquide à surface libre sur une paroi plane.

Les pressions exercées par un liquide sur les divers éléments d'une paroi courbe n'étant pas parallèles n'ont pas nécessairement une résultante unique; mais, dans certains cas, on peut trouver d'une manière simple la résultante de ces pressions élémentaires.

Prenons comme exemple les hémisphères de Magdebourg, et cherchons l'effort nécessaire pour séparer l'un des hémisphères après que le vide a été fait intérieurement, ce qui revient à chercher la résultante des pressions exercées par l'air sur une surface hémisphérique. A cet effet, imaginons une masse d'air atmosphérique contenue dans une demi-sphère; les pressions élémentaires $p, p', p'', \ldots$ exercées sur la surface courbe et la pression P exercée sur la base par l'air environnant font équilibre au poids de l'air atmosphérique contenu à l'intérieur. Par suite, si l'on néglige le poids de cet air, on voit que les pressions $p, p', p'', \ldots$ ont une résultante égale et contraire à P; l'effort nécessaire pour détacher l'hémisphère est donc égal à la pression exercée par l'atmosphère sur la base de l'hémisphère, si l'on néglige le poids de l'air dont l'hémisphère tient la place.

11. *Résultante des pressions exercées par un liquide sur les parois d'un vase.* — Un raisonnement analogue montre d'une manière immédiate que les pressions exercées par un liquide sur les parois d'un vase ont pour résultante le poids du liquide.

Si l'on considère une portion quelconque d'un liquide en équilibre, les pressions $p, p', p'', \ldots$ exercées par le liquide environnant sur les divers éléments de la surface qui limite la masse liquide font équilibre au poids du liquide; d'ailleurs les pressions $p_0, p_1, p_2, \ldots$ exercées par le liquide intérieur sur cette même surface sont respectivement égales et opposées aux forces $p, p', p'', \ldots$;

donc les forces p_0, p_1, p_2,... forment un système équivalent au poids du liquide.

12. *Tourniquet hydraulique.* — Les pressions p_0, p_1, p_2,... exercées par le liquide contenu dans un vase ont pour résultante le poids q du liquide contenu dans le vase, et, par suite, font équilibre à une force q' égale et contraire à q. Par suite, la force q' et les pressions élémentaires p_1, p_2, ..., considérées à l'exclusion de p_0, ont une résultante p égale et directement opposée à p_0; si l'on ouvre un orifice en enlevant la portion de paroi qui supporte la pression p_0, et si l'on admet, en outre, que toutes les autres forces du système restent les mêmes, la force p, égale et contraire à p_0, met le vase en mouvement.

13. Nous avons considéré jusqu'à présent les liquides soumis uniquement à l'action de la pesanteur; il est aisé de voir que les résultats sont analogues, si l'on suppose un liquide soumis à des forces de direction constante et proportionnelles aux masses sur lesquelles ces forces agissent.

Reprenons en effet le filet cylindrique AA′ (n° 3); soit r la résultante des forces appliquées au liquide contenu dans le cylindre, cette force est appliquée au centre de gravité du filet et a pour expression $\sigma l \rho$, si l'on appelle ρ la force appliquée à l'unité de volume. En conservant les autres notations, on a, comme précédemment,

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + l\cos\theta . \rho ;$$

mais $l\cos\theta$ est la projection de la longueur l sur la direction des forces supposée constante; si l'on représente cette projection par λ, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + \lambda\rho.$$

Elle donne lieu aux mêmes remarques que la relation (1); en particulier, si l'on appelle toujours *surface de niveau* le lieu géométrique des points où la pression $\frac{p'}{\omega'}$ est la même, on voit que la surface de niveau passant par le point A′ est le lieu géométrique des points pour lesquels $\lambda =$ const., c'est-à-dire un plan perpendiculaire à la direction commune des forces r.

14. Si les forces qui agissent sur le liquide ont des directions différentes, mais variant d'une manière continue, on peut considérer une masse liquide suffisamment petite pour que les forces appliquées aux divers éléments de volume conservent sensiblement la même direction, et remplacer dans une petite étendue la surface de niveau par le plan tangent à cette surface. D'après ce qui précède, le plan tangent est perpendiculaire à la direction des forces au point considéré; en d'autres termes, la surface de niveau est normale en chacun de ses points à la résultante des forces qui sollicitent le liquide.