Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 237-240
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__237_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 905

(voir 2e série, t. VIII, p. 46);

PAR M. VALABREGUE,
Élève à Sainte-Barbe.

On donne une ellipse et ses deux foyers F *et* G (*); *deux droites touchent cette ellipse aux points* M *et* N *et se coupent en* T : *démontrer la relation*

$$\frac{\overline{TF}^2}{MF.NF}=\frac{\overline{TG}^2}{MG.NG}.$$

(LAGUERRE.)

D'après un théorème connu, on a les relations

$$MFT=TFN,\quad MGT=TGN,\quad MTF=NTG;$$

or on a

$$\frac{TF}{MF}=\frac{\sin TMF}{\sin MTF},$$

$$\frac{TF}{NF}=\frac{\sin TNF}{\sin FTN};$$

donc

$$\frac{\overline{TF}^2}{MF\times NF}=\frac{\sin TMF\times\sin TNF}{\sin MTF\times\sin FTN}.$$

Pour avoir le rapport $\frac{\overline{TG}^2}{MG\times NG}$, il me suffirait de chan-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

ger TMF en π — TMF, et TNF en π — TNF, ce qui ne changerait pas les sinus; donc....

C. Q. F. D.

Note. — Ont résolu la même question : MM. A. G., étudiant en médecine; Thomas de Margam, Taibach; Henri Lez, à Lorrez; Willière; Alfred Giard; Maurice Aourt, élève au collége de Blaye; Louis Coquet, maître répétiteur au lycée de Bordeaux; Brocard, lieutenant du Génie; Paul Endrès, élève au lycée de Douai; Chadu, maître répétiteur au lycee de Bordeaux; Jannsen; Morel, répetiteur à Sainte-Barbe.

Question 914.

(voir 2ᵉ série, t VIII, p 48);

PAR M. MOREL,

Ancien elève de l'École Polytechnique, Répétiteur à Sainte-Barbe.

La formule $ax+b$, où a et b sont premiers entre eux, ne renferme que des nombres premiers à m, si tous les diviseurs premiers de m divisent a. Mais, si m a des diviseurs premiers p, q, r,..., qui ne divisent pas a, sur m nombres consécutifs compris dans $ax+b$, en posant

$$x=\alpha,\quad \alpha+1,\ldots,\quad \alpha+m-1,$$

il y aura

$$m\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{q}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right)\cdots$$

nombres premiers à m. (LE BESGUE.)

La première partie de ce théorème est évidente, puisque si $ax+b$ et m admettaient un facteur premier commun, ce facteur premier, divisant a et $ax+b$, devrait diviser b, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour démontrer la seconde partie, je vais d'abord établir le lemme suivant :

Si l'on a p nombres en progression arithmétique dont la raison r est première avec p, il y a un de ces nombres, et un seul, qui est divisible par p.

Pour démontrer ce lemme, on démontre que deux restes ne peuvent pas être égaux, puisque si l'on avait

$$a + nr = mp + \alpha, \quad a + n'r = mp + \alpha,$$

on aurait

$$(n - n')\, r = mp,$$

où r et p ne seraient pas premiers entre eux, ce qui est contre l'hypothèse. On a donc p restes différents inférieurs à p ; donc l'un d'eux est nécessairement o.

Cela posé, on voit que l'expression $ax + b$ peut être considérée comme un terme d'une progression arithmétique dont la raison est a. Comme j'ai m termes consécutifs de cette progression, je puis les séparer en $\frac{m}{p}$ groupes de p termes; dans chacun de ces groupes, il y aura un terme divisible par p; il y aura donc $\frac{m}{p}$ termes divisibles par p, et par conséquent $\frac{m}{p}(p - 1)$ qui ne seront pas divisibles par p, et qui, par suite de la première partie, seront premiers avec m, si p est le seul facteur de m qui ne divise pas a.

Si l'on suppose deux facteurs p et q ne divisant pas a, le nombre des termes divisibles par q sera $\frac{m}{q}$; sur ce nombre, il faut prendre ceux qui sont divisibles aussi par p, dont le nombre est $\frac{m}{pq}$; il reste donc, dans les $\frac{m}{p}(p - 1)$ nombres restants, $\frac{m}{pq}(p - 1)$ nombres divisibles par q, et par suite il y en a $m \frac{p-1}{p} \frac{q-1}{q}$ qui ne sont divisibles ni par p ni par q, et sont dès lors premiers avec m. C. Q. F. D.

On continuerait de même le raisonnement pour un plus grand nombre de facteurs.

Note. — Nous avons reçu trop tard pour l'insérer une autre solution très-simple de M. Netto, étudiant en mathématiques, à Berlin.