NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SAINT-GERMAIN

Détermination des foyers dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 230-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__230_1>

DÉTERMINATION DES FOYERS DANS LES CONIQUES;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN,

Répétiteur à Sainte-Barbe.

La définition la plus élémentaire des foyers consiste à les regarder comme des points dont la distance à un point quelconque de la conique s'exprime par une fonction rationnelle et linéaire de ses coordonnées. Il s'ensuit qu'on détermine les coordonnées α, β de ces points en identifiant l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta-(mx+ny+p)^2=0,$$

avec l'équation de la courbe

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Cette identification est facilitée d'une manière assez remarquable en remplaçant x par $X+\alpha$, y par $Y+\beta$. On aura alors

$$\begin{aligned}&AX^2+2BXY+CY^2+Xf'_\alpha(\alpha,\beta)+Yf'_\beta(\alpha,\beta)+f(\alpha,\beta)\\&\quad+\lambda(X^2+Y^2+2XY\cos\theta)=\lambda(mX+nY+m\alpha+n\beta+p)^2,\end{aligned}$$

ou, en posant

$$f'_\alpha=2D_1,\quad f'_\beta=2E_1,\quad f(\alpha,\beta)=F_1,$$
$$m\sqrt{\lambda}=m_1,\quad m\sqrt{\lambda}=n_1,\quad \sqrt{\lambda}(m\alpha+n\beta+p)=p_1:$$

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&AX^2+2BXY+CY^2+2D_1X+2E_1Y+F_1\\&\quad+\lambda(X^2+Y^2+2XY\cos\theta)=(m_1X+n_1Y+p_1)^2.\end{aligned}\right.$$

On identifie les deux membres, ce qui donne d'abord

$$m_1 = \sqrt{A+\lambda}, \quad n_1 = \sqrt{C+\lambda}, \quad p_1 = \sqrt{F_1},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \begin{cases} B + \lambda\cos\theta = \sqrt{A+\lambda}\,\sqrt{C+\lambda}, \\ D_1 = \sqrt{F_1}\,\sqrt{A+\lambda}, \\ E_1 = \sqrt{F_1}\,\sqrt{C+\lambda}. \end{cases}$$

L'élimination de λ se fait sans peine. Si l'on retranche la deuxième de la troisième équation après les avoir élevées au carré, on a

$$(3) \qquad E_1^2 - D_1^2 = (C - A)F_1.$$

En les multipliant, on a

$$E_1 D_1 = F_1 \sqrt{A+\lambda}\,\sqrt{C+\lambda} = (B + \lambda\cos\theta)\,F_1.$$

Si l'on y remplace λ par sa valeur tirée de la deuxième ou de la troisième des équations (2), on a l'une ou l'autre des équations

$$(4) \qquad \begin{cases} D_1^2\cos\theta = (A\cos\theta - B)F_1 + E_1 D_1, \\ E_1^2\cos\theta = (C\cos\theta - B)F_1 + E_1 D_1. \end{cases}$$

L'équation (3) et l'une des équations (4) déterminent les foyers. Elles donnent une démonstration très-simple d'une propriété bien connue des foyers. Le système des tangentes menées d'un point (α, β) à la conique est représenté par l'équation

$$\begin{aligned}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F)F_1 \\ = (D_1 x + E_1 y + D\alpha + E\beta + F)^2.\end{aligned}$$

Si l'on exprime que ce système a les caractères analytiques du cercle, on retrouve précisément les équations (3) et (4). Donc on peut dire sans difficulté que les foyers sont des points tels, que le système des tangentes menées de ces points à la courbe ont les caractères analytiques du cercle, et plus rapidement que ce sont les centres de cercles évanouissants, bitangents à la conique.

En prenant la racine carrée du premier membre de l'équation (1), on a l'équation de la directrice, polaire du point (α, β),

$$X\sqrt{A+\lambda} + Y\sqrt{C+\lambda} + \sqrt{F_1} = 0,$$

ou, remplaçant X par $x-\alpha$, Y par $y-\beta$, $\sqrt{A+\lambda}$ par $\frac{D_1}{\sqrt{F_1}}$, $\sqrt{C+\lambda}$ par $\frac{E_1}{\sqrt{F_1}}$,

$$xD_1 + yE_1 + D\alpha + E\beta + F = 0.$$

Si les axes coordonnés sont parallèles aux axes de la courbe, les équations (3) et (4) deviennent

$$D_1^2 - E_1^2 = (A-C)F_1, \quad E_1 D_1 = 0,$$

et il est facile d'en déduire que, dans les courbes à centre, les foyers sont à l'intersection des deux axes de la courbe et d'une hyperbole équilatère ayant les mêmes axes en direction. Dans la parabole, les deux équations ne représentent que chacune une droite, il n'y a qu'un foyer à distance finie. Un système de deux parallèles n'a plus de foyers, à moins d'être confondues : alors chaque point de cette droite double est un foyer.