Nouvelles annales de mathématiques

Darboux

Sur la méthode d'approximation de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 17-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__17_0>

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. DARBOUX.

Désignons par a et b $(a < b)$ deux nombres qui comprennent *une seule racine simple* de l'équation proposée

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Admettons de plus que l'équation

$$f''(x) = 0 \tag{2}$$

n'ait pas de racine comprise entre a et b, de telle sorte que $f''(x)$ garde le même signe quand x passe de a à b. Nous ne supposons rien sur la dérivée première, qui peut changer de signe dans l'intervalle de a à b (*).

Cela posé, soient $a + h$ ou $b - k$ la racine exacte. Nous aurons, pour déterminer les corrections h et k, les relations

$$0 = f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h),$$

$$0 = f(b - k) = f(b) - kf'(b) + \frac{k^2}{2} f''(b - \theta' k),$$

θ et θ' désignant des nombres positifs moindres que l'unité. De là nous déduisons :

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2}\frac{f''(a + \theta h)}{f'(a)} = \alpha + \alpha_1, \tag{3}$$

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{k^2}{2}\frac{f''(b - \theta' k)}{f'(b)} = \beta + \beta_1, \tag{4}$$

(*) Nous remarquerons toutefois que $f'(x)$ ne peut s'annuler qu'une fois, car deux racines de $f'(x)$ comprennent au moins une racine de $f''(x)$.

en posant

$$(5)\qquad \alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)},\quad \alpha_1 = -\frac{h^2}{2}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)},$$

et

$$(6)\qquad \beta = \frac{f(b)}{f'(b)},\quad \beta_1 = \frac{k^2}{2}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}.$$

On voit donc que si l'on néglige les quantités α_1 et β_1, qui sont très-petites en général, les corrections se réduisent h à α, k à β. On peut donc dire avec Newton que la correction positive ou négative est donnée approximativement par la formule

$$(7)\qquad h = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

a désignant une racine approchée, soit par défaut, soit par excès.

Discussion.

Proposons-nous de chercher quelles sont les conditions pour que la correction newtonnienne soit *sûrement* applicable, et quelle est celle des deux limites a et b qu'il faut substituer dans la formule générale

$$-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Remarquons que des trois nombres

$$a,\quad a+\alpha,\quad a+\alpha+\alpha_1,$$

le premier représente la valeur approchée de x, le dernier la valeur exacte de x; donc nous serons *certains* que la correction α est applicable et que $a+\alpha$ est plus approchée que a si les deux différences

$$(a+\alpha)-a=\alpha,$$
$$(a+\alpha+\alpha_1)-(a+\alpha)=\alpha_1,$$

sont de mêmes signes; ou bien, en nous reportant aux valeurs de ces différences, si

$$f(a) \quad \text{et} \quad f''(a + \theta h)$$

sont de mêmes signes; ou encore si

$$f(a) \quad \text{et} \quad f''(a)$$

sont de mêmes signes, puisque $f''(x)$ ne s'annule pas entre a et b.

Nous trouverons de même, en considérant les trois nombres

$$b - \beta - \beta_1, \quad b - \beta, \quad b,$$

que la correction β est *sûrement* applicable si

$$f(b) \quad \text{et} \quad f''(b)$$

sont de mêmes signes.

Comme d'ailleurs les fractions

$$\frac{f(a)}{f''(a)} \quad \text{et} \quad \frac{f(b)}{f''(b)}$$

sont de signes contraires, une seule des deux corrections est *sûrement* applicable, et nous pouvons formuler le théorème suivant qui résume notre discussion :

Théorème. — *Si entre a et b, qui comprennent une seule racine simple, la dérivée seconde ne change pas de signe, on peut appliquer avec certitude la correction de Newton à celle des deux limites pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe.*

Remarques.

I. La condition que $f(x)$ et $f''(x)$ aient le même signe est *suffisante* pour que l'on puisse appliquer la méthode de Newton avec la certitude d'approcher davantage de la racine, mais elle n'est pas *nécessaire*. Il peut arriver que $a + \alpha$ soit supérieur à $a + \alpha + \alpha_1$, et cependant plus près de $a + \alpha + \alpha_1$ que ne l'était a. Il arriverait alors qu'en appliquant la correction de Newton à la limite a, on dépasserait la racine, mais la nouvelle valeur $a + \alpha = b_1$ serait plus approchée que a, elle pourrait même être plus approchée que b. C'est l'incertitude qui pèserait sur $a + \alpha$ qui nous force à choisir celle des deux limites pour laquelle la correction a un sens bien déterminé.

II. Soit a la limite pour laquelle la correction de Newton est applicable avec certitude, c'est-à-dire pour laquelle $f(a)$, $f''(a)$ ont le même signe : on déduira de cette valeur a une autre, $a_1 = a + \alpha$, certainement plus approchée, et inférieure à x. La limite nouvelle a_1 pourra servir à en trouver une nouvelle, a_2, remplissant les mêmes conditions, car $f(a_1)$ et $f''(a_1)$ auront encore le même signe. Donc une fois que l'une des limites remplit la condition à laquelle nous l'avons assujettie, toutes celles qu'on en déduit en lui appliquant la méthode de Newton la remplissent aussi.

III. Pour cette limite, la correction ne peut jamais être en défaut, car si $f'(a)$ était nul, on aurait

$$o = f(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h),$$

résultat absurde, puisque les deux termes ont le même signe.

IV. On peut démontrer qu'à l'aide des approximations successives que donne la méthode de Newton, on s'approche de la vraie racine autant qu'on le veut. Soient

$$a, \quad a_1, \quad a_2 \ldots, \quad a_n, \quad a_{n+1} \ldots,$$

les valeurs successives, toutes moindres que x, si l'on part de la limite inférieure, on a généralement la relation

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Or la différence $a_{n+1} - a_n$ diminue indéfiniment, puisque les nombres a_n augmentent toujours, sans atteindre x; d'ailleurs $f'(a_n)$ ne peut pas être infini, puisque $f'(x)$ est constamment croissante ou décroissante entre les limites a et b; donc $f(a_n)$ tend vers zéro; donc a_n a pour limite x.

V. La limite de l'erreur commise peut s'évaluer approximativement par la formule

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2 f''(a)}{2f'(a)} = \frac{(f)^2 f''}{2(f')^3},$$

dans laquelle α représente la dernière correction et a la dernière valeur obtenue. Le nombre donné par cette formule est, en général, compliqué; on le remplacera dans la pratique par la première puissance de $\frac{1}{10}$, auquel il est inférieur. On trouvera ainsi facilement la dernière décimale à laquelle on devra borner la division, d'où l'on tire α, par la formule

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

On devra aussi prendre ce quotient par défaut, afin d'être bien sûr de rester en deçà de la racine; ou au delà si l'on est parti de la limite supérieure b.

Application (*).

Soit à résoudre l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0,$$

(*) Nous avons cru qu'il était utile aux élèves d'ajouter à cette lumineuse exposition de la méthode de Newton une application numérique complétement developpée. J. B.

prenons les dérivées successives

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 7,$$

$$\frac{1}{2} f''(x) = 3x - 3.$$

Formons le tableau des substitutions des nombres consécutifs :

x	f	f'	$\frac{1}{2} f''$
0	4	$-$ 7	$-$ 3
1	$-$ 5	$-$ 10	0
2	$-$ 14	$-$ 7	3
3	$-$ 17	2	6
4	$-$ 8	17	9
5	+ 19	38	12
0	4	$-$ 7	$-$ 3
$-$ 1	7	2	$-$ 6
$-$ 2	$-$ 2	17	$-$ 9

Nous voyons que l'équation a trois racines réelles,

x_1 compris entre 0 et 1,
x_2 compris entre 4 et 5,
x_3 compris entre -1 et -2.

Calcul de x_1. — Cette racine est comprise entre 0 et 1 ; la seconde dérivée f'' s'annulant à l'une des limites, nous ne connaissons pas son signe, cherchons une approximation plus grande pour x. Nous allons substituer 0,5 à la place de x et savoir si cette limite est en deçà ou au delà de x.

Voici un procédé commode de calcul pour trouver $f(a+h)$, $f'(a+h)$,..., dont on a besoin dans l'application de la méthode de Newton. La formule de Taylor donne

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{2.3} f'''(a) + \ldots ;$$

désignons simplement par f, f', f'', f''' les valeurs pour a de la fonction et de ses dérivées : nous formerons le tableau suivant le calcul qui s'explique lui-même :

f	....	....	....	....	f		
f'	hf'	....	....	....	hf'	f'	
f''	hf''	$\frac{1}{2}hf''$	$\frac{1}{2}h^2f''$	....	$\frac{1}{2}h^2f''$	hf''	f''
f'''	hf'''	$\frac{1}{2}hf'''$	$\frac{1}{2}h^2f'''$	$\frac{1}{2.3}h^3f'''$	$\frac{1}{2.3}h^3f'''$	$\frac{1}{2}h^2f'''$	hf'''
					$f(a+h)$	$f'(a+h)$	$f''(a+h)$

Appliquons ce procédé au calcul de $f(0,5), f'(0,5), f''(0,5), f'''(0,5)$, nous formerons le tableau suivant :

4	.....	.....	......	....	4,000			
−7	−3,5	.....	......	....	$\bar{1}6,500$	$\bar{1}3,00$		
−6	−3,0	−1,5	−0,75	....	$\bar{1},250$	$\bar{1}7,00$	$\bar{1}4,0$	
+6	3,0	1,5	0,75	0,25	0,125	0,75	3,0	6
					$\bar{1}9,875$	$\bar{1}0,75$	$\bar{1}7,0$	6
					− 0,125	− 9,25	− 3,0	6
					$f(0,5)$	$f'(0,5)$	$f''(0,5)$	$f'''(0,5)$

Ce calcul montre que 0,5 est supérieur à la racine, et comme la fonction f et la seconde dérivée ont le même signe à cette limite, c'est à elle qu'il faut appliquer la correction de Newton. Or

$$\varepsilon = \frac{(0,125)^2 \times 3}{2 \times (9,25)^3} < \frac{0,0156 \times 3}{2 \times 729} < 0,0001;$$

donc la correction α se poussera jusqu'aux dix-millièmes

$$\alpha = -\frac{0,125}{9,25} = -0,0135 \text{ par défaut;}$$

par suite

$$b_1 = 0,5 - 0,0135 = 0,4865 \text{ par excès.}$$

Pour continuer, il faut calculer $f(b_1), f'(b_1), \ldots$; nous procédons comme précédemment :

$-0,125$					
$-9,250$	$0,124\,875$				
$-3,000$	$0,040\,5$	$0,020\,25$	$-0,000\,273\,375$		
$6,000$	$-0,081$	$-0,040\,5$	$0,000\,546\,75$	$0,000\,182\,25$	$-0,000\,002\,460\,375$

$\bar{1},875$	$\overline{10},750$	
$0,124\,875$	$0,040\,5$	
$\bar{1}\,726\,625$	$0,000\,546\,75$	$\overline{17},000$
$\bar{1}7\,539\,625$		$\bar{1},919$
$\bar{1},999\,599\,164\,625$	$\overline{10},791\,046\,75$	$\overline{16},919$
$f(b_1)$	$f'(b_1)$	$f''(b_1)$

Nous avons donc

$$\varepsilon = \frac{(0,000\,404)^2 \times 3,081}{2 \times (9,208)^3} < 0,000\,000\,001;$$

donc la correction α se calculera jusqu'à la neuvième décimale

$$\alpha = -\frac{0,000\,400\,835\,375}{9,208\,953\,25} = -\,0,000\,043\,526 \text{ par défaut;}$$

donc

$$b_2 = 0,486\,500\,000 - 0,000\,043\,526,$$

donc

$$x_1 = 0,486\,456\,474 \text{ par excès.}$$

Calcul de x_2. — Cette racine est comprise entre 4 et 5, et comme

$$\frac{f(5)}{f''(5)} = \frac{+19}{+24} > 0,$$

la correction de Newton est applicable dès le début; voici sans explications le tableau des calculs :

1^{re} *Correction.*

$$\varepsilon = \frac{19^2 \times 24}{2 \times 38^3} = \frac{19^2 \times 12}{8 \times 19^3} = \frac{6}{4 \times 19} < \frac{1}{4 \times 3} < 0,1,$$

$$\alpha = -\frac{19}{38} = -\,0,5,$$

$$b_1 = 5,0 - 0,5 = 4,5.$$

2^e *Correction.*

19					
38	-19				
24	-12	-6	3		
6	-3	$-1,5$	0,75	0,250	$-0,125$

$f\,(4,5) = 19,000 + \bar{1}81,000 + 3,000 + \bar{1},875 = 002,875.$
$f'(4,5) = 38,00 + \bar{1}88,00 + 0,75 = 26,75,$
$f''(4,5) = 24 - 3 = 21,$
$f'''(4,5) = 6;$

$$\varepsilon = \frac{(2,875)^2 \times 21}{2 \times (26,75)^3} < \frac{174}{17676} < \frac{1}{100},$$

$$\alpha = -\frac{2,875}{26,75} = -0,10 \text{ par défaut},$$

$$b_2 = 4,50 - 0,10 = 4,40 \text{ par excès.}$$

3^e *Correction.*

2,875					
26,75	$-2,675$				
21	$-2,1$	$-1,05$	0,105		
6	$-0,6$	$-0,3$	0,03	0,010	$-0,001$

$f\,(4,40) = 2,875 + \bar{1}7,325 + 0,105 + 0,0\bar{1}9 = 0,304,$
$f'(4,40) = 26,75 + \bar{1}7,90 + 0,03 = 24,68,$
$f''(4,40) = 21 - 0,6 = 20,4,$
$f'''(4,40) = 6;$

$$\varepsilon = \frac{(0,304)^2 \times 20,4}{2 \times (24,68)^3} < \frac{0,1 \times 10}{8 \times 1000} < 0,0001,$$

$$\alpha = -\frac{0,304}{24,68} = 0,0123 \text{ par défaut},$$

$$b_3 = 4,4000 - 0,0123 = 4,3877.$$

Bornons-nous à cette correction, nous avons, à moins de 0,0001,

$$x_2 = 4,3877.$$

Calcul de x_3. — Cette racine est négative, mais la méthode ne fait aucune distinction entre les racines positives et les racines négatives; nous pouvons donc lui appliquer la correction.

— 2 est la limite inférieure,
— 1 est la limite superieure,

comme

$$\frac{f(-2)}{f''(-2)} = \frac{-2}{-18} > 0;$$

c'est à elle que nous appliquerons la correction. Voici le tableau des calculs :

1re *Correction.*

$$\varepsilon = \frac{4\times(-18)}{2\times 17^3} = -\frac{36}{4900} < -0{,}01,$$

$$\alpha = \frac{2}{17} = 0{,}11 \text{ par défaut,}$$

$$a_1 = -2{,}00 + 0{,}11 = -1{,}89 \text{ par défaut.}$$

2e *Correction.*

− 2					
17	1,87				
− 18	− 1,98	− 0,99	− 0,1089		
6	0,66	0,33	0,0363	0,0121	0,001331

$$f(-1{,}89) - \bar{1}8 + 1{,}87 + \bar{1}{,}8911 + 0{,}001331 = -0{,}237\,569,$$

$$f'(-1{,}89) = 17 + \bar{1}8{,}02 + 0{,}0363 = 15{,}0563,$$

$$f''(-1{,}89) = -18 + 0{,}66 = -17{,}34,$$

$$f'''(-\bar{1}{,}89) = 6;$$

$$\varepsilon = -\frac{(0{,}237\,569)^2 \times 17{,}34}{2\times(15{,}0563)^3} < \frac{0{,}06\times 9}{3375} < \frac{1}{6000} < 0{,}001,$$

$$\alpha = \frac{0{,}237\,569}{15{,}0563} = 0{,}015 \text{ par défaut,}$$

$$a_2 = -1{,}890 + 0{,}015 = -1{,}875 \text{ par defaut.}$$

On continuerait de même ; on a donc, à moins de 0.001,

$$x_3 = -1,875.$$