Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 173-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__173_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 903

(voir 2e série, t VIII, p. 45);

PAR M. HENRI LEZ

ET M. DUGRAIS,

Élève à l'école de Sainte-Barbe.

Si par le milieu de chaque arête d'un tétraèdre on fait passer un plan perpendiculaire à l'arête opposée, les six plans ainsi obtenus passent par un même point.

(M.)

Soit le tétraèdre ABCD (*). Soient H, K, L les milieux des arêtes AB, AC, AD; les plans menés par les milieux de ces arêtes perpendiculairement aux arêtes opposées CD, BD, BC se coupent suivant une même droite α, perpendiculaire à la face BCD : en effet, ces plans ont pour traces, sur le triangle HKL, les hauteurs de ce triangle, qui concourent en un même point.

Pour la même raison, les plans menés par les milieux des arêtes BA, BC, BD se coupent suivant une même droite β, perpendiculaire à la face ACD. Cette droite β rencontre la perpendiculaire α qui se trouve dans le même plan mené par le milieu de AB.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Enfin l'intersection des plans qui passent par le milieu des arêtes CA, CB, CD est une perpendiculaire γ à la face ABD, et cette droite appartient aussi aux plans qui contiennent α et β.

Ces trois perpendiculaires, qui ne sont pas dans le même plan, concourent donc au même point commun aux six plans en question.

Note. — M. Coquet, maître répétiteur au lycée de Bordeaux, et M. Figa Bartolomeo ont résolu la même question.

Question 908

(voir 2e série, t. VIII, p. 47);

PAR M. FIGA BARTOLOMEO,
de Turin.

Soit un quadrilatère inscriptible ABCD. *Si je considère un triangle formé par trois sommets de ce quadrilatère, les pieds des perpendiculaires abaissées du quatrième sommet sur les côtés du triangle considéré sont sur une ligne droite* xy.

Cela posé, démontrer :

1° *Que les quatre droites* xy, *que l'on peut construire en groupant trois à trois les quatre sommets* A, B, C, D, *se coupent en un même point* O;

2° *Que ce point est un point commun aux quatre cercles des neuf points des quatre triangles, et que, par suite, si un sommet se meut sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois autres, le lieu du point* C *sera le cercle des neuf points de ce triangle.*

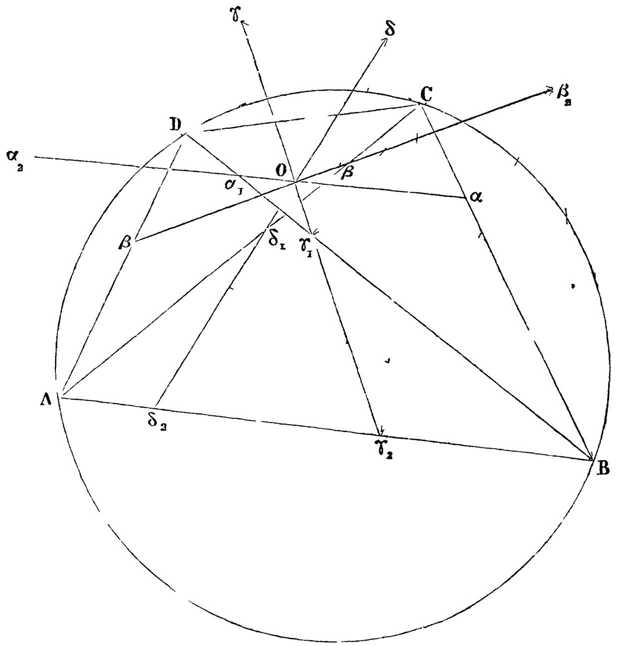
(E. LEMOINE.)

Soient A, B, C, D quatre points d'une circonférence, que l'on cherche les pieds des hauteurs des quatre triangles auxquels ils donnent lieu, on obtiendra ainsi douze points

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$$

Il est évident que les points α, α_1, α_2, β, β_1, β_2, ... sont sur une droite. Les deux droites $\gamma\delta$, AB sont parallèles, parce que le quadrilatère DC$\gamma\delta$ étant inscriptible, on a

$$D\gamma\delta = 180^\circ - DC\delta = 180^\circ - DAB$$



Les angles $\delta\delta_2 B$, $\gamma\gamma_2 A$ sont égaux, puisque les deux quadrilatères AD$\delta_2\delta_1$, BC$\gamma_1\gamma_2$ sont inscriptibles, et l'on a

(1) $$\delta_1\delta_2 D = \delta_1 AD = \gamma_1 BC = \gamma_1\gamma_2 C$$

Le trapèze $\gamma\delta\gamma_2\delta_2$ est donc isocèle; le point O d'intersection des droites $\gamma\gamma_2$, $\delta\delta_2$ sera un point de l'axe radical des deux cercles qui ont pour diamètres AC, DB. Il sera facile de voir par analogie que le trapèze $\beta\gamma\beta_2\gamma_2$ est isocèle : le point de concours des deux diagonales $\beta\beta_2$, $\gamma\gamma_2$ est sur l'axe radical des deux mêmes cercles de diamètres AC, DB. On voit donc que la droite $\beta\beta_2$ passe par O. On doit dire de même de la droite $\alpha\alpha_2$.

On voit par l'égalité (1) que l'angle $D\delta_2 O$, et par conséquent l'angle des deux droites $\gamma\gamma_2$, $\delta\delta_2$ ne dépend que de l'angle DBC. Il en résulte que si le point A se meut sur le cercle ABCD, les points B, C, D restant fixes, l'angle des deux droites $\gamma\gamma_2$, $\delta\delta_2$ ne varie pas, et son sommet O décrit la circonférence $\gamma_1\delta O$. On voit de même que, dans ce mouvement du point A, le point O doit décrire la circonférence $\beta_2\gamma_1 O$. Le point O se trouve donc sur la circonférence $\beta_2\gamma_1\delta$.

On peut démontrer aussi la même chose comme il suit :

Le quadrilatère $BC\beta_2\gamma_2$ étant inscriptible, on a

$$C\beta_2\gamma_1 = CBD,$$

et à cause de l'égalité (1)

$$C\beta_2\gamma_1 = \gamma_1\gamma_2 C.$$

On voit de même que

$$\delta\beta_2 D = D\delta_2\delta_1;$$

et en ajoutant ces deux dernières égalités, on aura

$$\delta\beta_2\gamma_1 = \gamma_1\gamma_2 C + D\delta_2\delta_1 = \delta_2 O\gamma_2;$$

donc, etc.

On déduit de ce qui précède :

1° Que les douze points α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1,...

peuvent être rangés en quatre groupes de trois chacun, de manière que les points de chaque groupe soient sur une droite; les quatre droites ainsi obtenues ont la même longueur et passent par un même point O;

2° Que ces mêmes points peuvent être rangés en quatre groupes de trois, de manière que les quatre cercles qui passent respectivement par les trois points de chaque groupe passent par le même point O;

3° Que ces mêmes points peuvent être arrangés en trois groupes de quatre points (α, β, γ, δ; α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2), de manière que les quatre points d'un groupe se trouvent sur une même circonférence; les trois cercles ainsi obtenus sont concentriques en O, et chaque groupe forme un quadrilatère semblable au primitif ABCD;

4° Que le point O est le point de concours des trois axes radicaux des trois couples de cercles qui ont pour diamètres les côtés opposés et les diagonales du quadrilatère ABCD;

5° Que trois droites comme $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$; $\alpha\gamma$, $\alpha_1\gamma_1$, $\alpha_2\gamma_2$, ..., sont parallèles.

Note du Rédacteur. — M. Jansen, élève du lycée de Douai, nous a envoyé une solution algébrique de la même question, et M. Morel une solution géométrique aussi simple que la précédente.

Voici, en résumé, la solution géométrique de M. Kiepert, étudiant en mathématiques, à Berlin :

Dans le quadrilatère inscriptible ABCD, abaissons des points C et D les perpendiculaires $C\gamma_2$, $D\delta_2$ sur AB qui rencontrent la circonférence aux points E et F. Soient d et c les points de rencontre des hauteurs dans les triangles ACB et ABD.

On sait que

$$\gamma_2 E = \gamma_2 d,$$
$$\delta_2 F = \delta_2 c;$$

il résulte de là que $CDcd$ est un parallélogramme. Les diagonales cC, dD se rencontrent en K, et l'on a

$$dK = KD,$$
$$cK = KC.$$

Mais toutes les droites qui joignent d et un point quelconque de la circonférence ont leurs milieux sur la circonférence des neuf points relative au triangle ABC.

De même le cercle des neuf points du triangle ABD passe par le milieu de Cc, c'est-à-dire par le point K.

Comme le triangle $\gamma_2 K \delta_2$ est isocèle, la droite qui passe par les pieds des perpendiculaires menées du point D aux côtés du triangle ABC est la droite $\delta_2 K$, et la droite qui passe par les pieds des perpendiculaires menées du point C aux côtés du triangle ABD est la droite $\gamma_2 K$.

On voit par là que le point K se confond avec le point O de la figure précédente.

Question 911

(voir 2e série, t. VIII, p. 47);

PAR M. V. HIOUX,

Surveillant général au lycée Saint-Louis (École préparatoire).

ÉNONCÉ. — *Si deux coniques de forme invariable se déplacent de manière que leurs quatre axes restent respectivement tangents à quatre cercles, et de manière que les points d'intersection des deux coniques soient sur un cercle, quel est le lieu des centres de ce cercle?*

(DARBOUX.)

1. Désignons par R, R′, R″, R‴ les rayons des quatre cercles, par $C(\alpha, \beta)$, $C'(\alpha', \beta')$, $C''(\alpha'', \beta'')$, $C'''(\alpha''', \beta''')$ leurs centres, et considérons deux axes rectangulaires quelconques dans le plan des quatre cercles.

Soient maintenant

$$B = y - mx - p = 0, \quad A = my + x - mq = 0$$

les équations des axes de la conique E (axes a, b), avec les conditions

$$p = \beta - m\alpha + R\sqrt{1 + m^2}, \quad q = \frac{m\beta' + \alpha' + R'\sqrt{1 + m^2}}{m},$$

qui expriment que ces axes sont tangents aux cercles R et R′.

Si $M(x, y)$ est un point de la conique E; si MP et MQ sont les distances de ce point aux axes a et b, on a

$$a^2\overline{MQ}^2 + b^2\overline{MP}^2 = a^2b^2.$$

Ainsi, l'équation de la conique E est

$$(E) \qquad a^2B^2 + b^2A^2 = a^2b^2(1 + m^2).$$

Puisque les quatre points communs aux deux coniques doivent être sur une même circonférence, les axes de la seconde sont respectivement perpendiculaires à ceux de la première, et leurs équations sont par suite

$$B' = my + x - mp' = 0, \quad A' = y - mx - q' = 0,$$

avec les conditions

$$p' = \frac{m\beta'' + \alpha'' + R''\sqrt{1 + m^2}}{m}, \quad q' = \beta''' - m\alpha''' + R'''\sqrt{1 + m^2}.$$

Ainsi l'équation de la conique E′ (axes a', b') est

$$(E') \qquad a'^2B'^2 + b'^2A'^2 = a'^2b'^2(1 + m^2).$$

Multiplions cette équation par λ, ajoutons-la à l'équation E, et nous obtenons

$$(\lambda) \qquad (a^2B^2 + \lambda a'^2B'^2 + b^2A^2 + \lambda b'^2A'^2 + H = 0;$$

cette équation représente un cercle si l'on fait

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2}{a'^2 - b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

En effet, le coefficient du terme en xy s'annule; la différence des coefficients des termes en x^2 et y^2 est

$$m^2[\lambda(a'^2 - b'^2) - (a^2 - b^2)] + [(a^2 - b^2) - \lambda(a'^2 - b'^2)];$$

cette différence s'annule, quel que soit m^2, pour la valeur précédente de λ.

Les équations qui déterminent le centre M se mettent facilement sous la forme

$$(1) \begin{cases} (a^2a'^2 - b^2b'^2)(1 + m^2)y \\ \quad - c'^2(a^2p + m^2b^2q) - c^2(m^2a'^2p' + b'^2q') = 0, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (a^2a'^2 - b^2b'^2)(1 + m^2)x \\ \quad + c'^2(ma^2p - mb^2q) - c^2(ma'^2p' - mb'^2q') = 0. \end{cases}$$

La première, multipliée par m et ajoutée à la seconde, donne, après la suppression du facteur $(1 + m^2)$ commun à tous les termes

$$(3) \quad (a^2a'^2 - b^2b'^2)(my + x) - c'^2b^2mq - c^2a'^2mp' = 0.$$

On obtient de même, en multipliant la seconde par m et la retranchant ensuite de la première,

$$(4) \quad (a^2a'^2 - b^2b'^2)(y - mx) - c'^2a^2p - c^2b'^2q' = 0.$$

Remplaçons maintenant p, q, p', q' par leurs valeurs; désignons par

$$F\left(x_1 = \frac{c'^2b^2\alpha' + c^2a'^2\alpha''}{a^2a'^2 - b^2b'^2}, \quad y_1 = \frac{c'^2b^2\beta' + c^2a'^2\beta''}{a^2a'^2 - b^2b'^2}\right),$$

$$F'\left(x'_1 = \frac{c'^2a^2\alpha + c^2b'^2\alpha'''}{a^2a'^2 - b^2b'^2}, \quad y'_1 = \frac{c'^2a^2\beta + c^2b'^2\beta'''}{a^2a'^2 - b^2b'^2}\right)$$

deux points fixes du plan, et nous pourrons mettre les équations (3) et (4) sous la forme

$$(6) \quad m(y-y_1)+(x-x_1)=\sqrt{1+m^2}\,\frac{c'^2b^2R'+c^2a'^2R''}{a^2a'^2-b^2b'^2},$$

$$(7) \quad (y-y'_1)-m(x-x'_1)=\sqrt{1+m^2}\,\frac{c'^2a^2R+c^2b'^2R'''}{a^2a'^2-b^2b'^2}.$$

Le premier membre de l'équation (6), divisé par $\sqrt{1+m^2}$, exprime la distance du point $M(x, y)$ à la droite

$$(D) \qquad m(y-y_1)+x-x_1=0;$$

cette distance est constante et égale à

$$\frac{c'^2b^2R'+c^2a'^2R''}{a^2a'^2-b^2b'^2}=R_1.$$

De même le premier membre de l'équation (7), divisé par $\sqrt{1+m^2}$, exprime la distance du même point $M(x,y)$ à la droite

$$(D') \qquad y-y'_1-m(x-x'_1)=0;$$

cette distance est aussi constante et égale à

$$\frac{c'^2a^2R+c^2b'^2R'''}{a^2a'^2-b^2b'^2}=R'_1.$$

La droite D passe par le point F et la droite D' par le point F'; elles sont d'ailleurs perpendiculaires l'une à l'autre.

Donc, si des points F et F' comme centres, on décrit deux cercles de rayons R_1, R'_1, le point M est le sommet d'un angle droit circonscrit à ces deux cercles.

Ainsi, le lieu du point M est un limaçon de Pascal. Le cercle directeur est le cercle qui a pour diamètre FF'; le paramètre l est égal à $\sqrt{R_1^2+R_1'^2}$.

Pour obtenir le pôle, divisons membre à membre les équations (6) et (7), nous obtenons

$$(8)\qquad \frac{m(y-y_1)+(x-x_1)}{(y-y'_1)-m(x-x_1)}=\frac{R_1}{R'_1}.$$

Soit B le point de concours des droites D et D'; l'équation (8) représente la droite BM. Cette équation (8) peut s'écrire

$$m[R'_1(y-y_1)+R_1(x-x'_1)]-[R_1(y-y'_1)-R'_1(x-x_1)]=0.$$

Ainsi la droite BM passe par un point fixe A, commun aux deux droites

$$R'_1(y-y_1)+R_1(x-x'_1)=0,$$
$$R_1(y-y'_1)-R'_1(x-x_1)=0.$$

Menons par les points F et F' des parallèles aux axes coordonnés, nous formons un rectangle $FF_1F'F'_1$ inscrit dans le cercle FF'. Les deux droites en question passent, la première au point $F_1(x'_1, y_1)$, la seconde au point $F'_1(x_1, y'_1)$. De plus, ces deux droites se coupent à angle droit, et, par suite, le point A appartient à la circonférence FF'. Ce point A est le pôle du limaçon lieu du point M.

II. *Discussion.* — Pour rendre la discussion plus commode, nous ferons la remarque suivante.

Considérons deux cercles O et O' de rayons R et R', et un rectangle $MM_1M'M'_1$ dont les côtés sont deux à deux tangents à ces cercles. Soit B le centre du rectangle; ce point appartient à la circonférence de diamètre OO'. Les diagonales MM' et $M_1M'_1$ du rectangle passent par deux points fixes A et A' de cette circonférence, puisque dans toutes les positions du rectangle l'angle OBM' est constant, ainsi que l'angle OBM'_1. Les sommets M et M' décrivent un limaçon L de pôle A, et les sommets M_1 et M'_1 décrivent un limaçon L' de pôle A'. Ces deux limaçons ont même paramètre $l = \sqrt{R^2 + R'^2}$. Comme les droites BA, BA′ sont conjuguées harmoniques relativement aux droites BO et BO′, nous les appellerons *limaçons conjugués*.

On passe de l'un à l'autre par le changement de R en $-R$ ou de R' en $-R'$.

Cela posé, admettons que les coniques E et E′ soient deux ellipses ayant leurs axes de même nom respectivement perpendiculaires, et supposons $a > b$, $a' > b'$.

Dans ce cas on ne peut pas avoir

$$a^2a'^2 - b^2b'^2 = 0;$$

par conséquent, le problème a toujours une solution.

Si dans l'équation (8) nous changeons R_1 en $-R_1$, nous aurons l'équation d'une droite BA′, conjuguée de BA par rapport à BF et BF′. Les droites BA, BA′ sont les diagonales d'un rectangle $MM_1 M'M'_1$ dont deux côtés sont tangents au cercle F et deux autres au cercle F′. Les points M et M′ appartiennent à un limaçon L_1 de pôle A et les sommets M_1, M'_1 à un limaçon L'_1 de pôle A′, conjugué du précédent.

Le lieu demandé est l'un ou l'autre de ces deux limaçons. Remarquons maintenant que le centre O de la conique E décrit un limaçon L, ou son conjugué L′, relativement aux deux cercles R et R′; de même le centre O′ de la conique E′ décrit un limaçon L″ ou son conjugué L‴ relativement aux cercles R″ et R‴.

Soient L et L″ les lieux des points O et O′ lorsque l'on donne aux quatre rayons le même signe, par exemple le signe +. Dans ce cas, le point M décrira le limaçon L_1 de pôle A.

Changeons R′ en $-R'$ et R″ en $-R''$, les centres O et O' décrivent les limaçons L' et L''' conjugués respectivement de L et L''. Mais on a changé par le fait R_1 en $-R_1$, donc le point M, venu en M_1, décrit le limaçon L'_1, de pôle A', conjugué de L_1.

On trouve pour les coordonnées du point A

$$Y_1 = \frac{R'^2_1 y_1 + R^2_1 y'_1 + R_1 R'_1 (x'_1 - x_1)}{R^2_1 + R'^2_1},$$

$$X_1 = \frac{R'^2_1 x_1 + R^2_1 x'_1 - R_1 R'_1 (y'_1 - y_1)}{R^2_1 + R'^2_1}.$$

Les coordonnées X'_1, Y'_1 du point A' s'en déduisent par le changement de R_1 en $-R_1$; de sorte que l'on a

$$\frac{Y_1 - Y'_1}{X_1 - X'_1} = -\frac{x_1 - x'_1}{y_1 - y'_1},$$

ce qui prouve que la corde AA' est perpendiculaire au diamètre FF'. Ainsi, les limaçons conjugués L_1 et L'_1 sont symétriques par rapport au diamètre FF'.

Supposons maintenant que les axes de même nom des deux ellipses soient respectivement parallèles, l'expression $a^2 a'^2 - b^2 b'^2$ deviendra

$$a^2 b'^2 - b^2 a'^2,$$

par le changement de a'^2 en b'^2, et réciproquement.

De sorte que, si les deux ellipses ne sont pas semblables, le problème a encore une solution. Mais si l'on a

$$a^2 a'^2 - b^2 b'^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

la circonférence de centre M devient une droite; le centre M est rejeté à l'infini, et il n'y a plus de lieu.

Si l'on fait

$$R = R' = R'' = R''' = 0,$$

on a aussi

$$R_1 = R'_1 = 0,$$

et, par suite,

$$l = \sqrt{R_1^2 + R'^2_1} = 0.$$

Mais les valeurs de x_1, y_1, x'_1, y'_1 ne sont pas altérées, puisqu'elles ne dépendent que des coordonnées des points C, C′, C″, C‴. Le rectangle $MM_1M'M'_1$, de dimensions $2R_1$ et $2R'_1$, se réduit à son centre B. Dans ce cas, le lieu est la circonférence qui a pour diamètre FF′.

Pour $R_1 = 0$, ce qui exige $R' = R'' = 0$, on a

$$Y_1 = y_1, \quad X_1 = x_1;$$

le point A et le point A′ se confondent avec le point F, le lieu devient un limaçon de pôle F et de paramètre $l = R'_1$.

De même pour $R'_1 = 0$, on a un limaçon de pôle F′ et de paramètre $l = R_1$.

Remplaçons l'ellipse E′ par une hyperbole; il suffit de changer b'^2 en $-b'^2$. Les points F et F′ se déplacent, mais on a constamment

$$a^2a'^2 - b^2b'^2 > 0;$$

ainsi le problème a toujours une solution.

Enfin, on pourrait considérer deux hyperboles, et l'on verrait comme précédemment que si l'on n'a pas

$$a^2a'^2 - b^2b'^2 = 0,$$

le lieu du point M est un limaçon lorsque l'on n'a pas à la fois $R_1 = 0$, $R'_1 = 0$; et dans cette double hypothèse le lieu est la circonférence de diamètre FF′.

III. *Cas particulier.* — Il reste à examiner le cas où les coniques sont deux paraboles; les quatre axes se réduisent à deux, et, par conséquent, au lieu de quatre cercles nous en prendrons deux, R′ et R″. Dans le numéro de janvier 1869, p. 32, on a envisagé le cas de deux paraboles tournant autour de leurs sommets supposés fixes. Si l'on considère deux points fixes comme deux cercles de rayons nuls, le problème que nous nous posons en ce moment est une généralisation de celui dont nous parlons.

Soient $S'(x', y')$, $S''(x'', y'')$ les sommets des deux paraboles en question, de paramètres p' et p''. Leurs quatre points d'intersection seront sur une même circonférence pourvu que leurs axes se coupent à angle droit. D'après cela, les équations des deux paraboles peuvent s'écrire

$$(p')\quad \left\{\begin{aligned} &[y - mx - (y' - mx')]^2 \\ &\quad = 2p'\sqrt{1+m^2}[my + x - (my' + x')], \end{aligned}\right.$$

$$(p'')\quad \left\{\begin{aligned} &[my + x - (my'' + x'')]^2 \\ &\quad = 2p''\sqrt{1+m^2}[y - mx - (y'' - mx'')]. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations, développées et ajoutées, donnent l'équation d'un cercle, lequel passe par les quatre points communs aux deux paraboles.

Le centre M de ce cercle est défini par les deux équations

$$\begin{aligned} &(1+m^2)y - (y' - mx') - mp'\sqrt{1+m^2} \\ &\qquad - m(my'' + x'') - p''\sqrt{1+m^2} = 0, \\ &(1+m^2)x + m(y' - mx') - p'\sqrt{1+m^2} \\ &\qquad - (my'' + x'') + mp''\sqrt{1+m^2} = 0, \end{aligned}$$

dont on déduit facilement les deux suivantes :

$$\begin{aligned} &my + x - (my'' + x'') - p'\sqrt{1+m^2} = 0, \\ &y - mx - (y' - mx') - p''\sqrt{1+m^2} = 0. \end{aligned}$$

Mais l'axe de (p') est tangent au cercle R′ et l'axe de (p'')

au cercle R″; donc on a

$$y' - mx' = \beta' - m\alpha' - R'\sqrt{1+m^2},$$
$$my'' + x'' = m\beta'' + \alpha'' - R''\sqrt{1+m^2}.$$

Par suite, les équations précédentes deviennent

$$m(y - \beta'') + (x - \alpha'') = \sqrt{1+m^2}\,(p' - R''),$$
$$y - \beta' - m(x - \alpha') = \sqrt{1+m^2}\,(p'' - R').$$

Ces équations sont analogues aux équations (6) et (7) (§ I). On a maintenant

$$\text{(D)} \qquad m(y - \beta'') + x - \alpha'' = 0,$$
$$\text{(D')} \qquad y - \beta' - m(x - \alpha') = 0.$$

Les points fixes F et F′ sont en C″ et C′.

Le lieu est un limaçon de Pascal dont le cercle directeur a pour diamètre C′C″, dont le paramètre est

$$l = \sqrt{(p' - R'')^2 + (p'' - R')^2},$$

et dont le pôle A est le second point d'intersection avec le cercle C′C″ de la droite BM, représentée par l'équation

$$\frac{m(y - \beta'') + x - \alpha''}{y - \beta' - m(x - \alpha')} = \frac{p' - R''}{p'' - R'}.$$

Le lieu devient le cercle C′C″ si l'on a simultanément

$$p' - R'' = 0, \quad p'' - R' = 0.$$

Suivant que le point de rencontre des axes des paraboles (p') et (p'') appartient à un limaçon L′ ou à son conjugué L″, le point M décrit le limaçon de pôle A ou son conjugué de pôle A′.

Enfin, supposons $R' = 0$, $R'' = 0$, et nous aurons ce théorème :

Lorsque deux paraboles données p et p′ se déplacent *dans leur plan de manière que leurs axes passent par deux points fixes* O *et* O′, *et se coupent à angle droit, le centre de la circonférence qui passe par leurs quatre points communs décrit un limaçon de Pascal dont le pôle* A *appartient à la circonférence de diamètre* OO′, *et qui a pour paramètre* $l = \sqrt{p^2 + p'^2}$.