A.-G. MELON

Sur les combinaisons complètes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 168-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__168_1>

SUR LES COMBINAISONS COMPLÈTES;

PAR M. A.-G. MELON,
Professeur.

Nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n.

Appelons a, b, c, d,..., l, les m lettres données. Prenons pour auxiliaires un certain nombre de lettres grecques α, β, γ,..., auxquelles nous attribuerons successivement des valeurs convenables et arbitraires. On combinera n à n, à la manière ordinaire, toutes les lettres données et auxiliaires, et on ne considérera que les groupes où il entrera au moins une lettre française. On voit par là qu'il suffira que le nombre des lettres grecques considérées soit égal à $(n-1)$.

En combinant les $(m+n-1)$ lettres n à n, à la manière ordinaire, on obtient les expressions :

$$\Sigma m_1 \alpha_{n-1},\quad \Sigma m_2 \alpha_{n-2},\quad \Sigma m_3 \alpha_{n-3},\ldots,\quad \Sigma m_{n-1} \alpha_1,\quad \Sigma m_n,$$

Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_1 \alpha_{n-1}$, il entre 1 lettre française et $(n-1)$ grecques,

Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_2 \alpha_{n-2}$, il entre 2 lettres françaises et $(n-2)$ grecques,

Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_3 \alpha_{n-3}$, il entre 3 lettres françaises et $(n-3)$ grecques,

....

Dans chaque terme contenu dans $\Sigma m_{n-1} \alpha_1$, il entre $(n-1)$ lettres françaises et 1 grecque,

Σm_n contient seulement des lettres françaises, et exprime l'ensemble des combinaisons ordinaires n à n des m lettres données.

Par des valeurs convenables données aux lettres grecques, nous allons successivement obtenir les combinaisons complètes cherchées où il n'entre d'abord qu'une lettre, puis deux lettres, puis trois,....

Dans $\Sigma m_1 \alpha_{n-1}$ rendons toutes les lettres grecques égales à la lettre française; nous obtenons Σa^n qui renferme m termes.

Dans $\Sigma m_2 \alpha_{n-2}$ rendons égales à la première lettre française successivement $(n-2)$, $(n-3)$, $(n-4)$,..., 0 des lettres grecques, tandis que nous égalerons à la deuxième lettre française restante chacune des lettres grecques restantes. Nous obtenons

$$\Sigma a^{n-1} b, \quad \Sigma a^{n-2} b^2, \quad \Sigma a^{n-3} b^3, \ldots, \quad \Sigma a b^{n-1}.$$

Le nombre des termes pour chaque groupe de deux lettres françaises est égal au nombre des combinaisons ordinaires $(n-2)$ à $(n-2)$ des $(n-1)$ lettres grecques. Ce nombre est donc $(n-1)$. Or le nombre des groupes où deux lettres françaises se joignent aux groupes de $(n-2)$ lettres grecques, égale le nombre des combinaisons ordinaires de m lettres 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$. Le nombre total des combinaisons complètes où il n'entre que deux lettres sera donc

$$\frac{m(m-1)}{1.2}(n-1).$$

On obtient ainsi toutes les combinaisons complètes renfermant deux lettres; car de $(a^{n-1}b)$ à (ab^{n-1}), il y a $(n-1)$ groupes et pas d'autres; et comme ces groupes se répètent en même nombre pour chaque combinaison de m lettres 2 à 2, nous aurons bien pour le nombre total $\frac{m(m-1)}{1.2}(n-1)$, et n'en aurons pas d'autres.

Nous obtiendrons d'une manière analogue toutes les combinaisons complètes où entrent trois lettres. Si dans $\Sigma m_3 \alpha_{n-3}$, nous prenons un terme $(abc.\alpha_{n-3})$, on voit, comme plus haut, que le nombre des combinaisons complètes que fournit ce terme, égale le nombre des combinaisons ordinaires des $(n-1)$ lettres grecques $(n-3)$ à $(n-3)$. Ce nombre est $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$. Comme il se trouve $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ groupes de trois lettres françaises (tels que abc), on aura, pour le nombre des combinaisons complètes où entrent trois lettres, l'expression

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.$$

Pareillement, le nombre des combinaisons complètes qui contiennent quatre lettres sera égal à

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.$$

Pour avoir le nombre total des combinaisons complètes de m lettres n à n, on à donc a faire la somme

$$\begin{aligned}
m &+ \frac{m(m-1)}{1.2}(n-1)\\
&+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\\
&+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}+\ldots\\
&+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}(n-1)\\
&+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.
\end{aligned}$$

Considérons les deux développements

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
(x+1)^m &= x^m + mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}+\ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1} &= \frac{1}{x^{n-1}} + (n-1)\frac{1}{x^{n-2}}\\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{1}{x^{n-3}}+\ldots
\end{aligned}\right.$$

Multiplions membre à membre, nous aurons

$$(x+1)^m \left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1}$$

$=$ un ensemble de termes de divers degrés $+$ une somme de termes du degré $(m-n)$ en x.

Cette dernière contient précisément les coefficients que nous voulons sommer. On s'en assure dans les développements (1) et (2), en multipliant entre eux les termes qui se correspondent verticalement. Dans la valeur du produit $(x+1)^m \left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1}$, nous allons chercher le terme de degré $(m-n)$. Son coefficient exprimera la somme cherchée. On a

$$(x+1)^m \left(\frac{1}{x}+1\right)^{n-1} = \frac{(x+1)^{m+n-1}}{x^{n-1}}.$$

Développons $\frac{(x+1)^{m+n-1}}{x^{n-1}}$, nous aurons pour le terme général

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-1-p)}{1.2.3\ldots(p+1)} \frac{x^{m+n-1-(p+1)}}{x^{n-1}},$$

ou

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-1-p)}{1.2\ldots(p+1)} x^{m-p-1}.$$

Disposons de p de façon que l'exposant de x soit égal à $(m-n)$. Pour cela posons

$$m-p-1=m-n;$$

on tire

$$p=n-1;$$

le coefficient devient

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}{1.2.3\ldots n}.$$

Le nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n est donc égal à celui des combinaisons ordinaires de $(m + n - 1)$ lettres n à n.