

A. GENOCCHI

Sur la théorie élémentaire des produits infinis

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 121-133

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__121_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PRODUITS INFINIS;

PAR M. A. GENOCCHI.

Il me semble que les théorèmes généraux sur la convergence des produits infinis peuvent être établis d'une manière tout à fait élémentaire et très-simple en suivant à peu près la marche tracée par M. Weierstrass (*), et en s'aidant de la *formule de Nicole* que j'ai citée dans une autre occasion (**). Voici comment on pourrait exposer cette théorie.

(*) Crelle, t. LI, p. 18-33.

(**) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1867.

1. On a l'identité, que j'appelle *formule de Nicole*,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a+v_0} + \frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)} \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} \\ &\dots\dots\dots \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_n)} \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_n)(a-q)}; \end{aligned} \right.$$

en multipliant par $b-a$, et portant le dernier terme dans le premier membre, on peut lui donner la forme

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{b-a}{a+v_0}\right) \left(1 + \frac{b-a}{a+v_1}\right) \dots \left(1 + \frac{b-a}{a+v_n}\right) \\ &= 1 + \frac{b-a}{a+v_0} + \frac{(b+v_0)(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)} \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} \\ &\dots\dots\dots \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_{n-1})(b-a)}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_{n-1})(a+v_n)}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi le premier membre est un produit de $n+1$ facteurs qui se développe dans une somme de $n+1$ termes; lorsque cette somme convergera vers une limite déterminée et finie pour des valeurs de n indéfiniment croissantes, il en sera de même du produit, qui alors sera appelé *convergent*, et cette limite sera la *valeur du produit infini*. Si la somme n'a pas de limite, le produit n'en aura pas non plus; et, par suite, la formule (2) transforme le produit dans une série, de manière qu'il sera

convergent, divergent ou indéterminé comme la série elle-même.

2. En faisant

$$\frac{b-a}{a+v_n} = u_n,$$

d'où

$$1 + u_n = \frac{b+v_n}{a+v_n};$$

la formule (2) deviendra

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & (1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n) \\ & = 1 + u_0 + (1+u_0)u_1 + (1+u_0)(1+u_1)u_2 + \dots \\ & \quad + (1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})u_n, \end{aligned} \right.$$

formule presque équivalente, due à Euler (*), qui ne diffère pas au fond de celle de Nicolé.

Si u_0, u_1, \dots, u_n sont des quantités positives, on peut tirer de la formule (3)

$$(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n) > 1 + u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n;$$

donc si la série $\sum u_n$ est composée de termes tous positifs et divergente, le produit $\prod (1+u_n)$ croît au delà de toute limite comme la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

3. En changeant le signe des quantités u_n , on aura

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & (1-u_0)(1-u_1)\dots(1-u_n) \\ & = 1 - u_0 - (1-u_0)u_1 - (1-u_0)(1-u_1)u_2 - \dots \\ & \quad - (1-u_0)(1-u_1)\dots(1-u_{n-1})u_n; \end{aligned} \right.$$

(*) *Novi Comment. Acad. Petropol.*, t. V, p. 76.

et si les quantités u_n sont positives et inférieures à l'unité, il s'ensuivra

$$(1 - u_0)(1 - u_1) \dots (1 - u_n) > 1 - u_0 - u_1 - u_2 - \dots - u_n,$$

puisque les facteurs supprimés dans le second membre seront aussi moindres que l'unité. On peut en déduire que si la série Σu_n composée de termes positifs est convergente, le produit $\Pi (1 - u_n)$ ne peut avoir pour limite zéro. Soit s , en effet, la somme de cette série : en supprimant, s'il faut, les premiers termes de la série et les facteurs correspondants du produit, on peut supposer $s < 1$, et comme on aura

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n < s,$$

on conclura

$$\Pi (1 - u_n) > 1 - s.$$

Donc le produit surpassera toujours une quantité positive déterminée. Il faut, évidemment, qu'aucune des quantités u_n ne soit égale à 1.

4. Dans le même cas, c'est-à-dire la série Σu_n étant composée de termes positifs et convergente, le produit $\Pi (1 + u_n)$ ne pourra pas augmenter à l'infini; car son inverse $\Pi \left(\frac{1}{1 + u_n} \right) = \Pi \left(1 - \frac{u_n}{1 + u_n} \right)$ ne peut avoir zéro pour limite, puisque la série $\Sigma \left(\frac{u_n}{1 + u_n} \right)$, dont les termes sont positifs et plus petits que les termes correspondants de la série Σu_n , sera à plus forte raison convergente (n° 3).

Si, au contraire, la série Σu_n est divergente, ses termes étant positifs et inférieurs à l'unité, le produit $\Pi (1 - u_n)$ aura pour limite zéro. En effet, son inverse

$\Pi \left(\frac{1}{1-u_n} \right) = \Pi \left(1 + \frac{u_n}{1-u_n} \right)$ augmente indéfiniment (n° 2), puisque la série $\Sigma \left(\frac{u_n}{1-u_n} \right)$, ayant ses termes positifs et plus grands que les termes correspondants de la série Σu_n , sera aussi divergente.

5. Si la série Σu_n est composée de termes positifs et convergente, chacun des produits $\Pi (1+u_n)$, $\Pi (1-u_n)$ sera aussi convergent, et sa valeur sera toujours différente de zéro pourvu qu'aucune des quantités u_n dans le second produit ne soit égale à l'unité.

La formule (2) fournit non-seulement la démonstration de ce théorème, mais développe en série convergente la valeur du produit. Soit, en effet,

$$\omega_n = \frac{b+v_0}{a+v_0} \cdot \frac{b+v_1}{a+v_1} \cdots \frac{b+v_{n-1}}{a+v_{n-1}} \cdot \frac{a-b}{a+v_n}.$$

Si les quantités a , b , v_n sont positives et $a > b$, on aura

$$0 < \omega_n < \frac{a-b}{a+v_n},$$

et la formule (2) donnera

$$\Pi \left(1 - \frac{a-b}{a+v_n} \right) = 1 - \Sigma \omega_n.$$

Or : 1° en omettant, s'il faut, les premiers termes et facteurs, on pourra supposer $u_n < 1$, et alors on pourra faire $u_n = \frac{a-b}{a+v_n}$, ce qui donnera $w_n < u_n$; par conséquent, la série Σw_n sera convergente comme Σu_n et le produit $\Pi (1-u_n)$ aura la même limite que $1 - \Sigma w_n$, limite différente de zéro (n° 3); 2° en prenant l'inverse

du premier membre on aura

$$\Pi \left(1 + \frac{a-b}{b+v_n} \right) = \frac{1}{1-\Sigma w_n},$$

et l'on pourra faire $u_n = \frac{a-b}{b+v_n}$: le produit $\Pi(1+u_n)$ ne pourra pas augmenter à l'infini (n° 4), et aura une limite déterminée en fonction de la somme de la série Σw_n , qui sera convergente, parce que, b étant $< a$, on aura $w_n < u_n$.

6. Au moyen de ces propositions on démontre aisément un théorème d'Abel. Si deux séries à termes positifs Σu_n , Σw_n sont liés par la relation

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = (1+u_n) \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

elles seront toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Car en posant

$$\frac{w_n}{u_n} = v_n,$$

il viendra

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + u_n;$$

d'où, en prenant successivement $n = 0, 1, 2, \dots$, et multipliant, on tire

$$v_n = v_0 (1+u_0)(1+u_1) \dots (1+u_{n-1});$$

mais si la série Σu_n est convergente, le produit $\Pi(1+u_n)$ est aussi convergent, et, par suite, reste au-dessous d'une quantité k , et, si la série Σu_n est divergente, ce produit peut surpasser toute quantité finie; donc on aura, dans le premier cas, $v_n < kv_0$, $w_n < kv_0 u_n$, et dans le second $v_n > kv_0$, $w_n > kv_0 u_n$. Ainsi, dans le premier cas, la série

Σw_n sera convergente; dans le second, elle sera divergente comme la série Σu_n .

Ce théorème découle encore plus simplement de la formule (3). En effet, si la série Σu_n est convergente, le produit formant le premier membre est aussi convergent, et comme on peut représenter le second membre par $1 + \Sigma w_n$, les quantités w_n vérifiant la relation ci-dessus, il faut que la série Σw_n soit de même convergente. Si la série Σu_n est divergente, il est évident que la série Σw_n sera aussi divergente, puisque $\frac{w_{n+1}}{w_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On satisfait à la relation qui lie les deux séries en supposant

$$u_n = \frac{w_n}{a + w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}},$$

où nous désignons par a une constante quelconque; et l'on parvient ainsi à l'énoncé sous lequel Abel a fait connaître son théorème.

7. Si le terme général u_n est imaginaire, soit ρ_n son module, et supposons que la série $\Sigma \rho_n$ soit convergente : le produit $\Pi (1 + u_n)$ sera aussi convergent. Car, en vertu du théorème d'Abel, la série

$$1 + \rho_0 + (1 + \rho_0)\rho_1 + (1 + \rho_0)(1 + \rho_1)\rho_2 + \dots$$

est convergente en même temps que la série $\Sigma \rho_n$; mais, ses termes n'étant pas inférieurs aux modules des termes de l'autre série

$$1 + u_0 + (1 + u_0)u_1 + (1 + u_0)(1 + u_1)u_2 + \dots,$$

il faut que celle-ci soit aussi convergente : donc est convergent le produit $\Pi (1 + u_n)$, qui, d'après la formule (3), est égal à la somme des $n + 1$ premiers termes de cette série.

8. Soit

$$i = \sqrt{-1}, \quad T_n = (1 + it_0)(1 + it_1) \dots (1 + it_n).$$

Si les quantités t_n sont réelles et positives, et que la série Σt_n soit divergente, mais la série $\Sigma (t_n)^2$ soit convergente, le produit T_n sera indéterminé pour n infini.

En effet :

1° En posant

$$T_n = P_n + iQ_n,$$

on aura

$$P_n^2 + Q_n^2 = (1 + t_0^2)(1 + t_1^2) \dots (1 + t_n^2),$$

et ce produit convergera (n° 5) vers une limite finie et déterminée que nous nommerons λ^2 . Donc P_n et Q_n n'augmentent pas indéfiniment.

2° Nous avons

$$P_n + iQ_n = (1 + it_n)(P_{n-1} + iQ_{n-1}),$$

d'où

$$P_n - P_{n-1} = -t_n Q_{n-1}, \quad Q_n - Q_{n-1} = t_n P_{n-1}.$$

Donc chacune de ces différences peut devenir aussi petite qu'on voudra, puisque, Q_{n-1} et P_{n-1} étant finis, le facteur t_n devient infiniment petit, sans quoi la série $\Sigma (t_n)^2$ ne serait pas convergente. En remplaçant n successivement par $n+1$, $n+2$, ..., $n+r$, et ajoutant, on trouve

$$\begin{aligned} P_{n+r} - P_{n-1} &= -(t_n + t_{n+1} + \dots + t_{n+r}) Q', \\ Q_{n+r} - Q_{n-1} &= (t_n + t_{n+1} + \dots + t_{n+r}) P', \end{aligned}$$

où P' et Q' désignent deux moyennes : la première entre P_{n-1} , P_n , P_{n+1} , ..., P_{n+r-1} ; la deuxième entre Q_{n-1} , Q_n , Q_{n+1} , ..., Q_{n+r-1} . Or les premiers membres sont toujours finis, mais la somme $t_n + t_{n+1} + \dots + t_{n+r}$ augmente à l'infini avec r , car la série Σt_n est divergente; il

faudra donc que les facteurs P' et Q' s'approchent indéfiniment de zéro.

3° Maintenant prenons n et r si grands, que d'une part la différence entre deux termes consécutifs de la suite $P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \dots$, et de l'autre le facteur P' soient en valeur absolue au-dessous d'une quantité donnée ε aussi petite qu'on voudra. Si tous les termes de cette suite sont de même signe, un d'entre eux, au moins, sera moindre que P' et partant que ε ; dans le cas contraire il y aura deux termes consécutifs de signes différents, et chacun d'eux sera moindre que leur différence et partant que ε . Les mêmes remarques s'appliquent à la suite $Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, \dots$; ainsi P_n et Q_n peuvent s'approcher de zéro tant qu'on voudra pour des valeurs indéfiniment croissantes de n .

4° Mais comme $P_n^2 + Q_n^2$ a pour limite λ^2 , il faudra que, pour Q_n très-voisin de zéro, P_n soit très-voisin de λ , et réciproquement. Donc ces quantités s'approchent aussi indéfiniment de λ .

Donc la quantité $T_n = P_n + iQ_n$, toujours finie, n'a pas de limite fixe (*).

9. En faisant $u_n = it_n$, on pourra développer le produit T_n par la formule (3). On obtiendra une série Σw_n dont le terme général sera

$$w_n = (1 + it_0)(1 + it_1) \dots (1 + it_{n-1}) it_n,$$

et qui sera indéterminée comme le produit. Mais dans ce terme général le produit $(1 + it_0)(1 + it_1) \dots (1 + it_{n-1})$ reste toujours fini, son module ayant pour limite λ , tandis que le facteur it_n a pour limite zéro : on a donc une série

(*) Cette démonstration est due à M. Weierstrass.

indéterminée dont le terme général a pour limite zéro, lorsque son rang n croît à l'infini.

On a quelquefois admis comme évident qu'une série ne peut être indéterminée lorsque son terme général décroît indéfiniment. On voit que les démonstrations fondées sur ce *postulatum* ne sont pas exactes.

10. Soit

$$u_n = p_n + iq_n, \quad \frac{q_n}{1 + p_n} = t_n, \quad T_n \text{ comme ci-dessus;}$$

nous aurons

$$\Pi (1 + u_n) = (1 + p_0) (1 + p_1) \dots (1 + p_n) T_n.$$

Si les parties réelles p_n n'ont pas pour limite -1 , et que la série Σq_n^2 soit convergente, la série Σt_n^2 sera aussi convergente, et le module du produit T_n aura une limite finie, car on pourra assigner un nombre positif $h < (1 + p_n)^2$, et l'on aura $t_n^2 < \frac{q_n^2}{h}$. D'ailleurs en supposant la série Σp_n divergente et les quantités p_n de même signe, le produit $\Pi (1 + p_n)$ augmente sans limite dans le cas de $p_n > 0$, et a pour limite zéro dans le cas de $p_n < 0$, $-p_n < 1$. Donc le produit $\Pi (1 + p_n)$ convergera aussi dans le second cas vers la limite zéro, et dans le premier croîtra indéfiniment.

Dans le cas de $p_n < 0$, où la limite de $\Pi (1 + u_n)$ est zéro, la série Σw_n , par laquelle ce produit est exprimé dans la formule (3), sera convergente, et l'on aura la relation

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} (1 + u_n).$$

On trouve ainsi un théorème analogue à celui d'Abel (n° 6).

Si la série Σp_n est convergente, et reste convergente lorsqu'on réduit ses termes à leurs valeurs numériques, le produit $\Pi (1 + p_n)$ est convergent (n° 7). Si d'un autre côté les quantités q_n sont de même signe, et que la série Σq_n soit divergente, la série Σq_n^2 convergente, le produit T_n sera indéterminé pour n infini (n° 9), car on pourra supposer $p_n^2 < 1$, et trouver deux nombres positifs h et k tels que

$$h < (1 + p_n)^2, \quad k > 1 + p_n,$$

d'où l'on conclura que les quantités t_n seront toutes de même signe, que la série Σt_n sera divergente, et la série Σt_n^2 convergente. Donc, dans les mêmes circonstances, le produit $\Pi (1 + u_n)$ sera aussi indéterminé pour n infini.

Ces résultats comprennent, comme cas particuliers, plusieurs théorèmes de Gauss et de M. Weierstrass.

11. En posant

$$a = 2m + 3, \quad b = 2m + 2, \quad v_n = 2n,$$

et multipliant par $2m$, la formule (1) donne

$$2m = \frac{2m}{2m+3} + \frac{2m}{2m+3} \cdot \frac{2m+2}{2m+5} \\ + \frac{2m}{2m+3} \cdot \frac{2m+2}{2m+5} \cdot \frac{2m+4}{2m+7} + \dots,$$

équation obtenue par M. Sarrus dans le seul cas de m entier et positif à l'aide de calculs et de principes plus élevés (*). Il la regardait comme un « résultat remarquable qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *a priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs »; et M. Gergonne demandait si la même formule aurait lieu pour m fractionnaire ou négatif. Or, d'après la for-

(*) *Annales de Mathématiques*, par Gergonne, t. X, p. 222.

mule (1) nous avons aussi le terme complémentaire

$\frac{2m+2}{2m+3} \cdot \frac{2m+4}{2m+5} \cdots \frac{2m+2n+2}{2m+2n+3}$ égal au produit

$$\left(1 - \frac{1}{2m+3}\right) \left(1 - \frac{1}{2m+5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2m+2n+3}\right)$$

multiplié par $2m$; et comme la série $\sum \frac{1}{2m+2n+3}$ est divergente, ce produit aura zéro pour limite (n° 4), pourvu toutefois qu'aucun des dénominateurs $2m+3$, $2m+5, \dots$ ne soit nul. Nous pouvons donc affirmer que la formule de M. Sarrus est vraie même pour des valeurs fractionnaires ou négatives de m , à l'exception seulement de celles qui donneraient $-m - \frac{1}{2}$ égal à un nombre entier et positif.

12. Faisant $a = 1$, $b = 1 - m$, $\nu_n = n$, on tire de la même formule (1) l'égalité (*)

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

et le terme complémentaire du second membre est

$$\pm \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)(m-n-1)}{1 \cdot 2 \dots n(n+1)},$$

ou

$$\pm \left(1 - \frac{m}{1}\right) \left(1 - \frac{m}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(1 - \frac{m}{n+1}\right);$$

la série $\sum \frac{m}{n}$ étant divergente, ce produit aura pour limite

(*) Posons $a = 0$, $b = A$, $\nu_n = -\alpha_n$: la formule de Nicole donne aussi l'identité générale

$$0 = 1 - \frac{A}{\alpha_0} + \frac{A(A-\alpha_0)}{\alpha_0 \alpha_1} - \frac{A(A-\alpha_0)(A-\alpha_1)}{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} + \dots$$

(Voir *Nouvelles Annales*, 1^{re} série, t. XVIII, p. 118, 219, 233.) J. B.

zéro tant que m sera positif (n° 4). Ainsi la formule du binôme $(1+x)^m$ est justifiée dans le cas de $x = -1$, si l'exposant m est > 0 .

La démonstration fondée sur le théorème de Taylor dans laquelle on emploie une expression du terme complémentaire ayant pour facteur la puissance $(1-\theta)^{m-1}$ et dépendant ainsi du nombre variable θ , n'est pas exacte pour $m < 1$, puisque ce facteur augmenterait indéfiniment si le nombre θ s'approchait indéfiniment de l'unité.

13. Considérons enfin le produit

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots(n+1)},$$

en supposant m imaginaire. On peut le mettre sous la forme

$$\pm \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right);$$

puis, en posant $m = m' + im''$, comme la série $\sum \frac{m'+1}{n}$ est divergente et que la série $\sum \left(\frac{m''}{n}\right)^2$ est convergente, on verra (n° 10) que ce produit a pour limite zéro lorsque la valeur de $m'+1$ est positive.

Cette proposition permet de juger de l'exactitude de la formule du binôme dans le cas de $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$ si l'exposant m reçoit des valeurs imaginaires : cas particulier omis dans tous les Traités, mais dont s'est occupé Abel dans un célèbre Mémoire.

On démontrera de la même manière que la formule de M. Sarrus, rappelée au n° 11, continue d'être exacte lorsque m est imaginaire.