

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 7
(1868), p. 519-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__519_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSEES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 849

(voir 2^e série, t VII, p 137),

PAR M. L. PAILLOTTE,
Etudiant à Montpellier.

*On donne une ellipse, trouver : 1^o le lieu des milieux
des cordes normales ; 2^o le lieu des pôles de ces normales ;*

(*) Le lecteur est prie de faire la figure.

3° la corde normale minimum ; 4° la corde normale qui détache le plus petit segment.

(M. COLLINS, *The educational Times.*)

1° L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, l'équation de la normale en fonction de son coefficient angulaire est

$$(1) \quad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}.$$

L'équation du diamètre correspondant aux cordes de direction m est

$$(2) \quad y = -\frac{1}{m} \frac{b^2}{a^2} x.$$

Le lieu est défini par ces deux équations, et si l'on élimine le paramètre variable m entre celles-ci, on aura l'équation du lieu.

Le résultat de l'élimination donne

$$(3) \quad (a^6 y^2 + b^6 x^2) (a^2 y^2 + b^2 x^2)^2 = a^4 b^4 c^4 x^2 y^2.$$

Pour avoir aisément la forme du lieu représenté par cette équation (3), on transformera ses coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et l'on aura

$$\rho^2 = \frac{a^4 b^4 c^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^2 (a^6 \sin^2 \omega + b^6 \cos^2 \omega)}.$$

Cette équation représente une rosace à quatre feuilles; ce lieu est symétrique par rapport aux axes de coordonnées OX, OY, et est tangent à ces mêmes axes.

Il est facile de voir que cette courbe est intérieure à l'ellipse. En effet, si l'on cherche l'équation aux ordonnées des points d'intersection de la courbe représentée par l'équation (3) et de l'ellipse dont l'équation est

$$(4) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

l'équation (3) devient, en tenant compte de cette dernière équation (4),

$$a^6 y^2 + b^6 x^2 = c^4 x^2 y^2,$$

et l'équation aux ordonnées est

$$c^4 y^4 + 2 b^4 c^2 y^2 + b^8 = 0,$$

équation qui n'a que des racines imaginaires.

2° Soient (α, β) les coordonnées du pôle de la corde normale

$$(1) \quad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}},$$

la polaire de ce point par rapport à l'ellipse aura pour équation

$$(2) \quad \frac{\alpha}{a^2} x + \frac{\beta}{b^2} y - 1 = 0.$$

Les équations (1) et (2), représentant la même droite, doivent être identiques, ce qui fournit les deux relations

$$(3) \quad \frac{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}{a^2 \beta} = - \frac{m \sqrt{a^2 + m^2 b^2}}{b^2 \alpha} = \frac{c^2 m}{a^2 b^2}.$$

Éliminant le paramètre variable m entre ces deux dernières équations, on a l'équation du lieu.

Cette équation est

$$a^6 y^2 + b^6 x^2 = c^4 x^2 y^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{a^6 \sin^2 \omega + b^6 \cos^2 \omega}{c^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}.$$

Ce lieu est une courbe à centre et à quatre branches infinies dont les asymptotes sont représentées par les équations

tions

$$x = \pm \frac{a^2}{c^2}, \quad y = \pm \frac{b^3}{c^2}.$$

On voit que ces asymptotes sont extérieures à l'ellipse, et on les construira facilement en s'aidant de la construction connue relative aux directrices de l'ellipse.

L'inclinaison du rayon vecteur minimum est

$$\text{tang } \omega = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{b}{a}},$$

et la longueur de ce rayon est

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2}.$$

On voit que ce rayon, dans l'angle XoY , se trouve à gauche de la diagonale du rectangle formé par les quatre asymptotes, puisque le coefficient angulaire de cette diagonale est $\frac{b^3}{a^3}$, quantité inférieure à $\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$, dans le cas de l'ellipse.

Au point M où le rayon vecteur minimum rencontre la courbe, on pourra facilement construire la tangente, qui est perpendiculaire à ce rayon.

Remarque I. — La recherche du lieu précédent revient à la recherche de celui-ci : Trouver le lieu des points tels, qu'en menant de ces points des tangentes à l'ellipse, l'une d'elles soit perpendiculaire à la corde des contacts; en d'autres termes, par chaque point de l'ellipse on mène une normale, et par les deux points d'intersection de cette normale avec l'ellipse on mène les tangentes : trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Remarque II. — Si l'on considère une ellipse con-

centrique à la première, et dont les axes soient respectivement $\left(2 \frac{a^3}{c^2}\right)$, $\left(2 \frac{b^3}{c^2}\right)$, et qu'on cherche le lieu du milieu de la portion de tangente à cette ellipse comprise entre les deux axes de coordonnées oX , oY , on trouve le même lieu.

3° Cherchons les équations aux abscisses et aux ordonnées des points d'intersection de la normale

$$(1) \quad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}$$

avec l'ellipse

$$(2) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Ces équations, une fois formées, on aura facilement la fonction

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$

(x', y') , (x'', y'') étant les coordonnées des points communs à la normale et à l'ellipse. On trouve, toutes réductions faites,

$$\delta^2 = \frac{4a^4 b^4 (m^2 + 1)^3}{(a^2 + b^2 m^2)(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

Égalant à zéro le numérateur de la dérivée, on obtient une équation qui est vérifiée pour $m = 0$ et pour $m^2 = \frac{c^2 + a^2}{c^2 + b^2}$.

Le numérateur est toujours positif; pour que m soit réel, c'est-à-dire pour qu'il y ait un minimum correspondant à cette valeur, il faut qu'on ait $c > b$, et dans ce cas il y a un minimum correspondant à $m = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c^2 - b^2}}$.

Si $c < b$, la dérivée ne change de signe que pour $m = 0$, ce qui correspond au grand axe; elle s'annule encore pour $m = \infty$, ce qui donne le petit axe.

4° Je considère l'ellipse rapportée à un système de dia-

mètres conjugués oX' , oY' , dont l'un des axes oY' est parallèle à la normale qui détache le plus petit segment.

Soient a' , b' , θ les éléments de ce système de diamètres conjugués; en désignant par S le segment elliptique, nous aurons, d'après une formule connue,

$$(1) \quad S = \frac{b'}{a'} \sin \theta s,$$

s étant le segment circulaire correspondant au segment elliptique S , dans le cercle de rayon a' .

En calculant s , on trouve

$$s = a'^2 \arcsin \frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{a'} - x \sqrt{a'^2 - x^2}.$$

La relation (1) peut donc s'écrire

$$(1') \quad S = \frac{b'}{a'} \sin \theta \left(a'^2 \arcsin \frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{a'} - x \sqrt{a'^2 - x^2} \right).$$

Exprimons qu'au point (x, y) , la normale à l'ellipse

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x^2 - a'^2 b'^2 = 0$$

est parallèle à oY' , nous aurons la condition

$$(2) \quad x^2 = \frac{a'^4 \cos^2 \theta}{b'^2 + a'^2 \cos^2 \theta}.$$

Les théorèmes d'Apollonius donnent les deux autres relations

$$(3) \quad d^2 = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

$$(4) \quad ab = a' b' \sin \theta.$$

Calculant les valeurs de x , a' , $\sin \theta$ à l'aide des équations (2), (3), (4), et portant ces valeurs dans (1'), on a

$$S = ab \left[\arcsin \frac{b'^2}{\sqrt{d^2 b'^2 - a'^2 b^2}} - \frac{b'^2 \sqrt{(d^2 - b'^2) b'^2 - a'^2 b^2}}{d^2 b'^2 - a'^2 b^2} \right].$$

Prenant la dérivée de S par rapport à b' et égalant à zéro

le numérateur de cette dérivée, on trouvera

$$\delta' = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Par suite, on a

$$S = ab \left[\arcsin \left(\frac{2ab}{d^2} - \frac{2abc^2}{d^4} \right) \right].$$

On calculera $\text{tang}\theta$, et à l'aide de la formule

$$\text{tang}\theta = \frac{a^2}{c^2} \left(m + \frac{b^2}{a^2m} \right)$$

que donne l'angle de deux diamètres conjugués, il sera facile d'avoir la direction de la normale correspondante.

Remarque. — Cette méthode aurait pu être employée pour la recherche de la plus petite normale inscrite dans l'ellipse. On aurait eu immédiatement δ ; car dans ce cas $\delta = 2\gamma$, γ étant l'ordonnée du point où la normale à l'ellipse est parallèle à oY' . Des calculs semblables à ceux que nous avons effectués plus haut donneraient

$$\delta^2 = 4 \frac{b'^6}{d^2 b'^2 - a^2 b^2},$$

et pour la longueur de la normale minimum

$$\delta^2 = 27 \frac{a^4 b^4}{d^6}.$$

Note. — M. Kaher Bey a résolu la même question en employant l'angle excentrique.
