

GIGON

Exercice sur l'emploi des coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 7
(1868), p. 471-475

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__471_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXERCICE SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES POLAIRES ;

PAR M. GIGON,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques.

PROBLÈME. — *Un angle constant tourne autour du foyer d'une conique; au point où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.*

Solution. — La conique donnée, rapportée à son foyer comme pôle, et à son axe focal comme axe polaire, a pour

équation

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - e \cos \omega}{p}.$$

On sait que, lorsque $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$ représente l'équation d'une courbe, la tangente à cette courbe en un point pour lequel $\omega = a$ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = f(a) \cos(\omega - a) + f'(a) \sin(\omega - a).$$

(DE COMBEROUSSE, *Cours de Mathématiques*, t. III, p. 265.)

Dans le cas actuel, la tangente à la courbe (1) en un point A situé sur le rayon vecteur $\omega = a$ est donnée par

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} \cos(\omega - a) - \frac{e}{p} \cos \omega;$$

et la tangente en un point B situé sur la courbe et le rayon vecteur $\omega = b$, par

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} \cos(\omega - b) - \frac{e}{p} \cos \omega.$$

La condition posée dans l'énoncé du problème est la suivante :

$$(4) \quad b - a = \text{const.} = K.$$

Un point quelconque du lieu est donné par l'intersection des droites (2) et (3), dans lesquelles les paramètres a et b sont liés par la relation (4); en éliminant a et b entre ces trois équations, on aura l'équation du lieu.

On met (2) et (3) sous la forme

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{e}{p} \cos \omega = \frac{1}{p} \cos(\omega - a),$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{e}{p} \cos \omega = \frac{1}{p} \cos(\omega - b);$$

il s'ensuit $\cos(\omega - a) = \cos(\omega - b)$, c'est-à-dire

$$(5) \quad \omega - a = 2n\pi \pm (\omega - b);$$

mais l'angle K est supposé < 180 degrés, et $b - a = K$; on ne peut donc avoir ni $b = a$, ni $b = a + 2n\pi$; on doit prendre le signe — dans le second membre de (5), et poser

$$(6) \quad 2\omega = a + b + 2n\pi.$$

Multiplions (2 bis) par (3 bis), transformons en somme de cosinus le produit des seconds membres, il vient, vu (6),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{e}{p} \cos \omega\right)^2 &= \frac{1}{2p^2} \{ \cos[2\omega - (a + b)] + \cos(b - a) \} \\ &= \frac{1}{2p^2} (1 + \cos K) = \frac{1}{p^2} \cos^2 \frac{K}{2}, \end{aligned}$$

et, en extrayant la racine,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{e}{p} \cos \omega = \pm \frac{1}{p} \cos \frac{K}{2};$$

et, par suite, le lieu est représenté par

$$(7) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - \left(\frac{e}{\cos \frac{K}{2}}\right) \cos \omega}{\left(\frac{p}{\cos \frac{K}{2}}\right)}$$

et par

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{1}{\rho} = - \frac{1 + \left(\frac{e}{\cos \frac{K}{2}}\right) \cos \omega}{\left(\frac{p}{\cos \frac{K}{2}}\right)}.$$

Discussion. — On remarque que les deux équations (7) et (7 bis) ne sont pas distinctes l'une de l'autre ; car on passe de la première à la seconde, en changeant ρ en $-\rho$, et ω en $\pi + \omega$; elles représentent donc la même courbe, et il suffit de discuter l'une d'elles, (7) par exemple.

La courbe représentée par (7) est une conique homofocale à la proposée (1) ; son excentricité $e' = \frac{e}{\cos \frac{K}{2}}$, et

son paramètre $p' = \frac{p}{\cos \frac{K}{2}}$.

Si la conique proposée est une hyperbole ($e > 1$), la conique (7) est toujours une hyperbole, facile à construire.

Si la proposée est une parabole ($e = 1$), le lieu (7) est toujours une hyperbole, excepté dans le cas singulier où $\cos \frac{K}{2} = \pm 1$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$K = 0 \quad \text{ou} \quad K = 360 \text{ degrés ;}$$

on trouve alors, pour le lieu, une parabole qui se confond avec la proposée (1), ce qui devait être.

Si la proposée (1) est une ellipse ($e < 1$), le lieu (7), suivant qu'on a $e' < 1$, $e' > 1$, ou $e' = 1$, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, ce qui revient aux conditions suivantes :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Ellipse,} & \text{si } \cos \frac{K}{2} > \frac{e}{a} ; \\ \text{Hyperbole,} & \text{si } \cos \frac{K}{2} < \frac{e}{a} ; \\ \text{Parabole,} & \text{si } \cos \frac{K}{2} = \frac{e}{a} . \end{array} \right.$$

Si l'on joint par deux droites le foyer pris pour origine aux deux sommets de la proposée, situés sur son petit axe, et qu'on appelle α l'angle de ces deux droites, on trouve

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{c}, \quad \text{ou} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{a}.$$

Or, l'angle K étant supposé toujours < 180 degrés, les conditions (8) font savoir que le lieu (7) sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'angle donné K sera plus petit que l'angle α , ou plus grand, ou lui sera égal.

En effet, cet angle α est l'angle minimum de tous les angles β sous lesquels on voit du foyer les différents diamètres de l'ellipse; les angles β varient depuis α jusqu'à 180 degrés; si donc l'angle donné K est plus petit que α , la corde AB d'intersection des côtés de cet angle avec l'ellipse ne sera jamais un diamètre, et les deux tangentes à la courbe en A et en B ne pourront pas être parallèles; par suite, il n'y aura pas de point du lieu situé à l'infini, et la conique (7) sera fermée.

Si l'angle K est égal à α , il y aura une position, et une seule, où la corde AB sera un diamètre de la proposée (1); ce cas se présentera quand AB se confondra avec le petit axe; alors le lieu (7) est une parabole aisée à construire.

Si l'angle K est plus grand que α , on trouvera deux directions asymptotiques symétriques par rapport à l'axe polaire; le lieu est alors une hyperbole dont la construction n'offre aucune difficulté.
