

## Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 7  
(1868), p. 417-419

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1868\\_2\\_7\\_\\_417\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__417_0)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

*Question 847*

(voir 2<sup>e</sup> série, t VII, p 137);

PAR M. T. DOUCET,  
Professeur au lycée de Lyon.

*Par une droite tangente à une surface quelconque en un point M, on mène différents plans sécants; on construit pour chacune des sections que ces plans déterminent dans la surface la parabole qui oscule la section au point M: le lieu des foyers de ces paraboles est un cercle.*

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface. Rapportons-la à des axes rectangulaires, prenons pour origine le point M et pour plan des  $xy$  le plan tangent en ce point, puis appliquons à la fonction  $z$  le développement de Maclaurin. On aura

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + \dots,$$

les coefficients  $a, b, \dots$ , ayant une signification connue.

Si l'on choisit, en outre, comme axe des  $x$ , la droite considérée, la section faite dans la surface par un plan incliné de l'angle  $\theta$  sur le plan tangent aura pour équation dans son plan

$$(1) \quad \beta \sin \theta = a\alpha^2 + b\alpha\beta \cos \theta + c\beta^2 \cos^2 \theta + d\alpha^3 + \dots;$$

l'axe des  $\alpha$  est  $Mx$  et l'axe des  $\beta$  est la trace du plan sécant sur  $zMy$ .

Une parabole située dans le plan sécant et tangente en  $M$  à l'axe  $Mx$  a une équation de la forme

$$(2) \quad (\beta - m\alpha)^2 = 2n\beta.$$

Si l'on substitue dans (1)  $\alpha$  déduit de l'équation (2) en fonction de  $\sqrt{\beta}$  et qu'on exprime que l'équation résultante est satisfaite par  $(\sqrt{\beta})^4 = 0$ , la parabole et la courbe (1) ont en  $M$  quatre points communs. On trouve les deux conditions

$$(3) \quad \begin{cases} \sin \theta = \frac{2an}{m^2}, \\ \frac{2a}{m^2} + \frac{b \cos \theta}{m} + \frac{2nd}{m^3} = 0. \end{cases}$$

L'axe de la parabole a pour équation

$$\beta = m\alpha + \frac{n}{1+m^2};$$

le foyer est en outre sur la droite

$$\beta + m\alpha = 0;$$

les coordonnées  $\beta'$  et  $\alpha'$  de ce foyer sont donc

$$\beta' = \frac{n}{2(1+m^2)}, \quad \alpha' = -\frac{n}{2m(1+m^2)},$$

et, par rapport aux axes primitifs,

$$(4) \quad z = \frac{n \sin \theta}{2(1+m^2)}, \quad y = \frac{n \cos \theta}{2(1+m^2)}, \quad x = -\frac{n}{2m(1+m^2)}.$$

L'élimination de  $n$  entre les trois équations (4) donne

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg} \theta, \quad z + mx \sin \theta = 0;$$

entre les deux équations (3) elle donne

$$m(ab \cos \theta + d \sin \theta) + 2a^2 = 0.$$

De ces trois dernières on tire immédiatement

$$(5) \quad dz + aby - 2a^2x = 0.$$

Substituant les valeurs de  $m$  et de  $n$  dans celle de  $z$ , on a

$$(6) \quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{4a} = 0,$$

équation d'une sphère.

Le lieu cherché est donc une circonférence, intersection de la sphère (6) par le plan (5).

L'examen des équations (5) et (6) indique facilement les particularités que peut présenter cette circonférence.

*Note.* — M. Neuberg, professeur à Bruges, nous a envoyé une solution très-élégante de la même question; nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de l'insérer.

La solution de M. Pellet se rapproche de celle de M. Doucet.

---