E. CATALAN

Note sur un problème d'analyse indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 63-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__63_0>

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

PAR M. E. CATALAN.

Extrait des *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei.*

PROBLÈME. — *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré* (*).

I.

A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

on a

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+y-1)^3$$
$$= \frac{y}{8}(2x+y-1)\left[4x^2 + 4(y-1)x + 2y(y-1)\right];$$

ou, en représentant par s la somme des y cubes, et en posant

$$(1) \qquad 2x + y - 1 = z,$$
$$(2) \qquad 16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1).$$

(*) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi (*Note sur quelques sommations de cubes*). Bien que ce savant géomètre y donne les solutions *rationnelles* de l'équation *générale*

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions *entières* de l'équation *particulière*

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+n-1)^3 = y^2.$$

D'après l'égalité (1), y et z sont de *parités différentes*. Par suite, $2yz$ et y^2+z^2-1 sont divisibles par 4. Donc s sera un carré si le second membre de l'équation (2) est un carré.

Soient

$$(3) \quad 2yz=\alpha,\quad y^2+z^2+1=\beta,\quad y+z=\lambda,\quad z-y=\mu,\quad s=t^2,$$

nous aurons

$$(4) \quad \alpha\beta=16t^2,\quad \alpha+\beta+1=\lambda^2,\quad \beta-\alpha+1=\mu^2.$$

Ainsi la question se réduit à *trouver deux multiples de* 4, α, β, *tels, que* $\alpha\beta$, $\alpha+\beta+1$, $\beta-\alpha+1$ *soient des carrés.*

II.

L'élimination de β, entre la première et la troisième des équations (4), conduit à

$$(5) \quad 64t^2+(\mu^2-1)^2=(2\alpha+\mu^2-1)^2.$$

Les solutions entières de cette équation sont données par les deux systèmes de formules

$$(6) \quad 2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2,\quad \mu^2-1=u^2-v^2,\quad 4t=uv,$$

$$(6') \quad 2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2,\quad \mu^2-1=2uv,\quad 8t=u^2-v^2;$$

d'où l'on tire, soit

$$(7) \quad \alpha=v^2,\quad \beta^2=u^2,$$

soit

$$(7') \quad 2\alpha=(u-v)^2,\quad 2\beta=(u+v)^2.$$

Ainsi, α, β *ou leurs doubles sont des carrés.*

III.

Les équations (7) équivalent à

$$(8) \quad 2yz=v^2,\quad y^2+z^2-1=u^2.$$

Soit $y = \frac{p}{q} z$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible; on déduit de là

(9) $$y = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

γ étant un nombre entier. De plus, y et z étant de *parités différentes,* il en est de même pour p et q; en outre, γ *est impair*. Enfin, à cause de $2yz = v^2$, $2pq$ *est un carré;* ce qui prouve que *des deux nombres* p, q, *l'un est un carré et l'autre le double d'un carré.*

Au moyen des valeurs (9), la seconde équation (8) devient

(10) $$(p^2 + q^2)\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Dans chaque cas particulier, l'équation (10) fera connaître les valeurs de γ et de u. On aura ensuite

(11) $$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = 2pq\,\frac{\gamma^2 u^2}{16}.$$

IV.

Si l'on répète sur les formules (7') des calculs analogues aux précédents, on trouve

(8') $$4yz = (u-v)^2, \quad 2(y^2 + z^2 - 1) = (u+v)^2 = 4u'^2,$$

(9') $$y = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

(10') $$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 2u'^2 = 1,$$

(11') $$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = pq\,\frac{\gamma^2 u'^2}{4};$$

cette fois, *p et q sont des carrés, l'un pair, l'autre impair* (*).

(*) Il ne m'a pas été possible de trouver une solution de l'équation (10'). Pourrait-on démontrer qu'elle n'en admet aucune?

V. — Applications.

1° $p = 8$, $q = 9$. L'équation (10) devient

$$145\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Elle est vérifiée par $\gamma = 1$, $u = 12$; d'où $x = 1$. En laissant de côté cette solution connue, on en trouve une infinité au moyen de la relation

$$u + \gamma\sqrt{145} = (12 + \sqrt{145})^{2n+1}.$$

Par exemple, $n = 1$ donne

$$u = 6948, \quad \gamma = 577;$$

puis

$$y = 4616, \quad x = 289, \quad s = (3.577.6948)^2.$$

Ainsi

$$289^3 + 290^3 + \ldots + 4904^3 = (3.577.6948)^2.$$

2° $p = 2$, $q = 25$. L'équation (10) est

$$629\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Les valeurs les plus simples sont

$$\gamma = 313, \quad u = 7850 \ (*);$$

d'où

$$y = 626, \quad x = 3600, \quad s = (5.313.3925)^2.$$

On a donc

$$3600^3 + 3601^3 + \ldots + 4225^3 = (5.313.3925)^2$$

3° Si dans la relation

$$u + \gamma\sqrt{629} = (7850 + 313\sqrt{629})^{2n+1},$$

(*) La Table X de Legendre (*Théorie des nombres*, t. Ier) renferme une faute typographique : au lieu de 1850, on doit lire 7850.

on suppose $n = 1$, on trouve

$$u = 7850^3 + 3.7850.313^2.629 = 7850(7850^2 + 3.313^2.629),$$
$$\gamma = 3.7850^2.313 + 313^3.629 = 313(3.7850^2 + 313^2.629).$$

Or

$$7850^2 = 61622500, \quad 313^2 = 97969,$$
$$3.313^2.629 = 184867503, \quad 313^2.629 = 61622501;$$

donc

$$\begin{aligned} u &= 7850(61622500 + 184867503) = 7850.246490003 \\ &= 1934946523550, \\ \gamma &= 313(184867500 + 61622501) = 313.246490001 \\ &= 77151370313. \end{aligned}$$

Si ces valeurs sont exactes, on doit avoir

$$629.77151370313^2 - 1934946523550^2 = 1.$$

En effet,

$$77151370313^2 = 5952331941173657717969,$$
$$629.77151370313^2 = 3744018804899823070460502501,$$
$$1934946523550^2 = 3744018804899823070460502500,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Des valeurs précédentes de γ et de u, on tire

$$y = 2\gamma = 154302740626, \quad x = \frac{23\gamma + 1}{2} = 887240758600,$$
$$x + y - 1 = 1041543499225;$$
$$s = \left(\frac{u\gamma}{2}\right)^2 = (967473261775.77151370313)^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &887240758600^3 + 887240758601^3 + \ldots + 1041543499225^3 \\ &= (967473261775.77151370313)^2. \end{aligned}$$

5.